

Nb : On rédigera absolument les exercices sur des copies séparées.

Tout résultat intermédiaire pourra être admis pour permettre la résolution d'un exercice. Il est rappelé que les résultats sans preuves, même justes, sont considérés inexistantes.

Exercice 1 *Formule de Mac Laurin pour la fonction exponentielle notée f*

Nb : On change de feuille, svp.

1.1 Justifier l'existence d'un développement de Mac-Laurin à tout ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) pour la fonction $f = \exp$.

Ecrire ce développement à l'ordre n sur $[0, x]$, sachant que le réel x vérifie $x > 0$.

1.2 Soit $x_1 = 10^{-4}$ et $x_2 = 10^8$; l'égalité issue de la question 1.1 est-elle valide pour ces deux valeurs de x ?

a) Utiliser encore 1.1 pour fournir les développements de Mac Laurin de f à l'ordre $n = 1$ pour $x = x_i$, avec $i \in \{1, 2\}$.

b) Si $n = 1$ et $x = x_2$, minorer le reste de Mac-Laurin. Que peut-on en conclure ?

1.3 *Croissances comparées de $f(x)$ et de x^n pour n quelconque de $\mathbb{N}^*$*

h désigne le reste de Mac Laurin pour le développement d'ordre n de f ; pour tout x de $\mathbb{R}^{++}$ on a donc:

$$(R) \quad e^x = p_n(x) + h(x) \text{ où } p_n \text{ est la partie régulière de degré } n$$

a) A partir de (R) , montrer que Q défini par: $Q(x) = e^x/x^n$ s'écrit $Q_1(x) + Q_2(x)$ où $Q_2(x)$ dépend d'un réel $c(x)$ élément de $]0, x[$ tandis que $Q_1(x)$ est borné pour x voisin de $+\infty$.

b) L désigne ici $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x/x^n)$. Déterminer L .

c) Interpréter le résultat obtenu.

d) En guise de bilan, le théorème établi dans c) est-il de nature locale ou globale ? Argumenter brièvement.

Exercice 2 *Intégration*

Nb : On change de feuille, svp.

On considère pour tout réel $\alpha > 0$, l'intégrale $J(\alpha)$ définie par:

$$J(\alpha) = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1 + \alpha^2 \tan^2(x)} dx.$$

2.1 Montrer que $J(\alpha)$ existe pour tout $\alpha > 0$.

2.2 *Etude du cas $\alpha = 1$*

Calculer $J(1)$.

Indication: On remarquera que $1 + \tan^2(x) = 1/\cos^2(x)$ et on linéarisera.

2.3 *On suppose désormais $\alpha \neq 1$*

On se propose de calculer $J(\alpha)$ par changement de variable.

a) On pose u définie par $u(x) = \tan(x)$. Montrer que le changement de variable proposé est licite sur l'intervalle considéré et fournir la nouvelle expression de $J(\alpha)$.

b) *Décomposition en éléments simples*

- Montrer qu'il existe des réels A et B tels que pour tout u de $\mathbb{R}$ on ait:

$$\frac{1}{(1 + \alpha^2 u^2)(1 + u^2)} = \frac{A}{(1 + \alpha^2 u^2)} + \frac{B}{(1 + u^2)}.$$

- En déduire le calcul de $J(\alpha)$.

c) La décomposition en éléments simples obtenue dans la question b) est-elle valide si $\alpha = 1$? Pourquoi ?

Exercice 3 *Réduction d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$*

Nb : On change de feuille, svp.

On rapporte $\mathbb{R}^3$ à sa base canonique, notée $B = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A relativement à B donnée par:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.1 *Diagonalisation de A*

- Calculer le polynôme caractéristique de A .
- Déterminer les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 de A ; en déduire que A est diagonalisable.
- Déterminer les espaces propres E_{λ_i} pour i élément de $\{1, 2, 3\}$.
- Déterminer une base B' de vecteurs propres pour A .
- Soit P la matrice de passage de B à B' . Donner l'expression de P liée aux choix antérieurs.
- Sans calculs, donner l'expression de la matrice $D = P^{-1}AP$.

3.2 *Prolongement 1*

Pour tout réel a , on définit la matrice M_a de $M_3(\mathbb{R})$ par:

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

- Exprimer M_a en fonction de A .
- Montrer que pour tout réel a , il existe une matrice diagonale D_a telle qu'on puisse écrire: $M_a = PD_aP^{-1}$.
- Déterminer l'ensemble des réels a tels que M_a soit inversible.

3.3 *Prolongement 2*

On se propose d'étudier les matrices X de $M_3(\mathbb{R})$ qui vérifient $X^2 = M_a$.

- Montrer que si X vérifie $X^2 = M_a$, alors X commute avec M_a pour le produit matriciel.
- Montrer que si X vérifie $X^2 = M_a$, alors X commute avec A .
- On note h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice relativement à la base canonique est X^2 . Montrer que si X vérifie $X^2 = M_a$, alors tout vecteur propre de f est un vecteur propre de h .
- Caractériser les réels a tels qu'il existe une matrice X dans $M_3(\mathbb{R})$ qui vérifie $X^2 = M_a$.