Exercice 1 : Pour $a \in \mathbb{R}$, on donne $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a-2 & 2 \end{pmatrix}$ considérée comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique B.

1 point 1. Calculer le polynôme caractéristique $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$.

1 point 2. Déterminer les valeurs propres de A. A quelles conditions sur a la matrice A est-elle diagonalisable ?

3. **Pour cette question on suppose que $a = 0$.**

1 point (3-a) Quelle est la multiplicité de la valeur propre 0.

1 point (3-b) Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre 0. En déduire sa dimension.

1 point (3-c) la matrice A est-elle diagonalisable ?

4. **Pour cette question on suppose que $a \neq 0$ et $a \neq 2$.**

3 points (4-a) Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres.

1 point (4-b) Déterminer une base propre de $\mathbb{R}^3$, notée B'. En déduire l'écriture de A dans la base B', notée D, ainsi qu'une matrice de passage notée P.

1 point (4-c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $A^n = PD^nP^{-1}$.

1 point 5. Dans le cas où $a = 2$, la matrice A serait-elle diagonalisable ?

Exercice 2 : (3 points) Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que, quels que soient a, b et c dans $\mathbb{R}$, la matrice A est toujours diagonalisable.

Exercice 3 : Dans cet exercice, on désire déterminer la primitive $F(x)$ de la fonction $f(x) = \frac{1}{x(x^2-1)^2}$, c-à-d,

$$F(x) = \int \frac{1}{x(x^2-1)^2} dx$$

1 point 1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

1 point 2. Montrer que $F(x)$ existe sur D_f.

1 point 3. A l'aide du changement de variable $u = x^2$, montrer que $F(x)$ se transforme en

$$F(u) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u(u-1)^2} du$$

2 points 4. Décomposer $\frac{1}{u(u-1)^2}$ en éléments simples.

1 point 5. Déterminer la primitive $F(u)$. En déduire la primitive $F(x)$.