Exercice 1 :

Partie A

On donne $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ considérée comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

- 2 points 1. Calculer le polynôme caractéristique $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ et déterminer les valeurs propres de A .
- 3 points 2. Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres.
- 2 points 3. Déterminer une base propre de $\mathbb{R}^3$, notée B' . En déduire l'écriture de A dans la base B' , notée D , ainsi qu'une matrice de passage notée P .
- 1 point 4. Montrer que la donnée même de la matrice A montre que le vecteur $\vec{j}$ est un vecteur propre associé à une des valeurs propres.
- 2 points 5. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $A^n = P D^n P^{-1}$.

Partie B : (2 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 2 :

Partie A

Dans cet exercice, on désire déterminer la primitive $F(x)$ de la fonction $f(x) = \frac{3x+1}{x^3-4x}$, c-à-d,

$$F(x) = \int \frac{3x+1}{x^3-4x} dx$$

- 1 point 1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f et montrer que $F(x)$ existe sur D_f .
- 2 points 2. Décomposer la fonction $f(x)$ en éléments simples.
- 1 point 3. Déterminer la primitive $F(x)$.

Partie B

On considère l'intégrale suivante :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

1 point 1. En majorant la fonction $\frac{x^n}{1+x}$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

1 point 2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.

2 points 3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.