Exercice 1 : On donne $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ considérée comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique.

2 points 1. Calculer le polynôme caractéristique $\boldsymbol{p(\lambda) = det(A - \lambda I)}$ et déterminer les valeurs propres de $\boldsymbol{A}$.

4 points 2. Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres.

2 points 3. Déterminer une base propre de $\mathbb{R}^3$, notée $\boldsymbol{B}$. En déduire l'écriture de $\boldsymbol{A}$ dans la base $\boldsymbol{B}$, notée $\boldsymbol{D}$, ainsi qu'une matrice de passage notée $\boldsymbol{P}$.

2 points 4. Sans calculer la matrice $\boldsymbol{A^2}$, montrer qu'elle est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Exercice 2 : Dans cet exercice, on désire déterminer la primitive $\boldsymbol{F(x)}$ de la fonction $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sin(x)}}$, c-à-d,

$$\boldsymbol{F(x) = \int \frac{1}{\sin(x)} dx}$$

1 point 1. Déterminer l'ensemble de définition $\boldsymbol{D_f}$ de la fonction $\boldsymbol{f}$ et montrer que $\boldsymbol{F(x)}$ existe sur $\boldsymbol{D_f}$.

1 point 2. Posons $\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{\sin(x)} dx}$. Montrer que $\boldsymbol{g(-x) = g(x)}$.

1 point 3. En utilisant la règle de Bioche, montrer par un changement de variable convenable que

$$\boldsymbol{F(x) = -\int \frac{1}{1 - u^2} du}$$

2 points 4. Décomposer la fonction $\boldsymbol{\frac{1}{1-u^2}}$ en éléments simples.

1 point 5. Déterminer la primitive $\boldsymbol{F(x)}$.

Exercice 3 : 4 points : Considérons les fonctions suivantes :

$$\boldsymbol{g(x) = \Big(\cos(x)\Big)^{\frac{1}{\sin^2(x)}}}$$
$$\boldsymbol{h(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2} + x}$$

Déterminer les limites suivantes

$$\boldsymbol{\lim_{x \longrightarrow 0} g(x)}$$
$$\boldsymbol{\lim_{x \longrightarrow -\infty} h(x)}$$