Exercice 1 : On donne $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ considérée comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique.

$\boxed{\text{2 points}}$ 1. Calculer le polynôme caractéristique et déterminer les valeurs propres de $\boldsymbol{A}$.

$\boxed{\text{4 points}}$ 2. Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres ainsi que leurs bases.

$\boxed{\text{1 point}}$ 3. La matrice $\boldsymbol{A}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 2 : 3 points : Pour quelles valeurs de $\boldsymbol{a}$ la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4+a & 5+a \\ a & a \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

Exercice 3 : Dans cet exercice, on désire déterminer la valeur de l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin^2(x) - 5\sin(x) + 6} dx$$

$\boxed{\text{2 points}}$ 1. Posons $g(x) = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x) - 5\sin(x) + 6} dx$. Montrer que $g(\pi - x) = g(x)$.

$\boxed{\text{3 points}}$ 2. En utilisant la règle de Bioche, montrer par un changement de variable convenable que

$$I = \int_0^1 \frac{1}{u^2 - 5u + 6} du$$

$\boxed{\text{3 points}}$ 3. Décomposer la fonction $\frac{1}{u^2-5u+6}$ en éléments simples.

$\boxed{\text{2 points}}$ 4. Déterminer la valeur de $\boldsymbol{I}$.