**Exercice 1 :** On donne $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ considérée comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique.

2 points 1. Calculer le polynôme caractéristique $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$ et déterminer les valeurs propres de $A$.

3 points 2. Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres.

2 points 3. Déterminer une base propre de $\mathbb{R}^3$, notée $B$. En déduire l'écriture de $A$ dans la base $B$, notée $D$, ainsi qu'une matrice de passage notée $P$.

2 points 4. Quelles sont les valeurs propres de $A^n$.

**Exercice 2 : (4 points)** Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad b \neq 0$$

une matrice admettant une seule valeur propre double. Montrer que la matrice $A$ n'est pas diagonalisable ?

**Exercice 3 :** Dans cet exercice, on désire déterminer la primitive $F(x)$ de la fonction

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x) - 5\sin(x) + 6}$$

c-à-d,

$$F(x) = \int f(x)dx$$

1 point 1. Posons $g(x) = f(x)dx$. Montrer que $g(\pi - x) = g(x)$.

2 points 2. En utilisant la règle de Bioche, montrer par un changement de variable convenable que

$$F(x) = \int \frac{1}{u^2 - 5u + 6} du$$

2 points 3. Décomposer la fonction $\frac{1}{u^2-5u+6}$ en éléments simples.

2 points 4. Déterminer la primitive $F(x)$.