Nb : On rédigera absolument les exercices sur des copies séparées.

Exercice 1 *Nombres complexes*

Nb : On change de feuille, svp.

Le plan affine P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; l'unité graphique est représentée par 1 cm.

1.1 On donne pour tout complexe z, $P(z) = z^3 - 27$.

a) Vérifier que $P(z) = (z-3)\left(z^2 + 3z + 9\right)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : P(z) = 0$.

1.2 On considère les points du plan A, B, C d'affixes respectives :

$$z_A = 3; \quad z_B = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i; \quad z_C = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i.$$

a) Déterminer module et argument des nombres complexes z_A, z_B et z_C.

b) Démontrer que les points A, B et C appartiennent à un même cercle (Γ), dont on précisera le centre et le rayon.

c) Représenter graphiquement A, B et C dans le plan P rapporté à $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1.3 On note D, d'affixe z_D, l'image de C par la rotation de centre O et d'angle $-\pi/3$. Montrer que $z_D = -3$ et placer le point D sur la figure de la question 1.2 c).

1.4 *Etude d'un ensemble de points*

On note F l'ensemble des points M de P dont l'affixe z vérifie: $|z+3| = 3$.

a) Vérifier que les points O, B et C appartiennent à l'ensemble F.

b) Montrer que F est l'image du cercle (Γ) par une transformation du plan dont on fournira les éléments caractéristiques.

Exercice 2 *Matrices*

Nb : On change de feuille, svp.

On considère l'ensemble $M_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées de côté 2 à coefficients réels et on note I sa matrice unité.

2.1 Soit A élément de $M_2(\mathbb{R})$ donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer A^2 puis A^3.

b) En déduire que A est inversible. Quelle est son inverse ?

.../...

2.2 *Etude des puissances de A*

NB: Dans cette question on pourra démontrer séparément a), b) et c) ou bien prouver par récurrence une seule propriété qui établit les trois résultats simultanément.

a) Montrer par récurrence, que pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété $P(n)$ est vraie, sachant que: $P(n)$: $A^{3n} = I$.

b) Montrer par récurrence, que pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété $Q(n)$ est vraie, sachant que: $Q(n)$: $A^{3n+1} = A$.

c) Montrer par récurrence, que pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété $R(n)$ est vraie, sachant que: $R(n)$: $A^{3n+2} = A^2$.

d) En déduire qu'on connaît pour tout k de $\mathbb{N}$, l'expression de A^k. Fournir en particulier A^{2011}.

e) Conjecturer sans preuve l'expression de A^k lorsque k est élément de $\mathbb{Z}$.

Exercice 3 *Suites et séries numériques*

Le but de cet exercice est d'établir, par l'étude de deux cas, que si la série $(\sum u_n)$ *converge alors* $\left(\sum u_n^{1-1/n}\right)$ *converge aussi.*

On note (u_n) une suite de réels strictement positifs, définis pour tout n de $\mathbb{N}^*$; on pose $v_n = u_n^{1-1/n}$.

3.1 *Etude du premier cas*

On supose, dans ce premier cas, que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $u_n \geq e^{-n}$.

a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, montrer que : $-\frac{\ln(u_n)}{n} \leq 1$.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, montrer que: $v_n = e^{\ln(u_n) - \frac{\ln(u_n)}{n}}$; en déduire que $v_n \leq e u_n$.

c) Conclure que dans ce premier cas, si la série $(\sum u_n)$ converge alors $\left(\sum u_n^{1-1/n}\right)$ converge aussi.

3.2 *Etude du deuxième cas*

On supose, dans ce deuxième cas, que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $u_n \leq e^{-n}$.

a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, montrer que : $n \leq -\ln(u_n)$.

Nb : On remarquera que si $(\sum u_n)$ converge, alors nécessairement (u_n) tend vers 0 et par suite $-\ln(u_n)$ est positif à partir d'un certain rang.

b) On considère alors la suite (w_n) définie, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, par : $w_n = [-\ln(u_n)]^2 u_n^{1-1/n}$ Montrer que:

$$\ln(w_n) = \ln(u_n)\left[1 - \frac{1}{n} + 2\frac{\ln(-\ln(u_n))}{\ln(u_n)}\right].$$

c) *Etude de* (w_n)

- On rappelle que $\lim_{x\to+\infty} [\ln(x)/x] = 0$. En déduire que:

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{\ln(-\ln(u_n))}{\ln(u_n)}\right] = 0.$$

- En conclure que $\lim_{n\to+\infty} (w_n) = 0$.
- En déduire qu'à partir d'un certain rang, on a: $w_n \leq 1$.

d) Conclure que dans ce deuxième cas, si la série $(\sum u_n)$ converge alors $\left(\sum u_n^{1-1/n}\right)$ converge aussi.