Nb : On rédigera absolument les exercices sur des copies séparées.

Exercice 1 *Nombres complexes*

Nb : On change de feuille, svp.

Le plan affine P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; pour tout point M du plan, on convient de noter z_M son affixe.

1.1 On considère l'équation $(E) : z^3 + 8 = 0$.

a) On pose $\alpha = -8$. Fournir le module et l'argument du complexe α.

b) En déduire la résolution de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

N.B: On fournira l'écriture trigonométrique et algébrique des solutions.

1.2 On considère les points du plan A, B, C définis par:

$$z_A = -2; \quad z_B = 1 - i\sqrt{3}; \quad z_C = 1 + i\sqrt{3}.$$

Soit D le milieu de $[OB]$ et r la rotation de centre O et d'angle $2\pi/3$.

a) Montrer que $r(A) = B$, $r(B) = C$ et $r(C) = A$. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

N.B: On pourra utiliser la question 1.1.

b) On considère le point L défini par: $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{OD}$. Déterminer z_D puis z_L.

c) Déterminer l'argument du complexe z_L/z_D. En déduire que $\overrightarrow{OL}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{AL}$.

d) Montrer que L est sur le cercle de diamètre $[AO]$.

Exercice 2 *Matrices*

Nb : On change de feuille, svp.

On considère l'ensemble $M_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées de côté 3 à coefficients réels; on note I sa matrice unité et O sa matrice nulle. On donne pour tout l'exercice une matrice A élément de $M_3(\mathbb{R})$; ainsi:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.1 Vérifier que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et que $A^3 = O$. En déduire A^n pour tout entier naturel $n > 3$.

2.2 A tout réel x on associe la matrice $M(x)$ de $M_3(\mathbb{R})$ définie par:

$$M(x) = I + xA + \frac{x^2}{2}A^2.$$

a) Fournir l'écriture matricielle de $M(x)$ pour un x réel quelconque. Quelle est en particulier $M(0)$?

b) Montrer que tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$ on a: $M(x + y) = M(x)M(y)$.

.../...

c) En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a: $M(x)M(-x) = I$ et $M(x)$ inversible. Quelle est $[M(x)]^{-1}$?

Application numérique

On donne $B = M(4)$. Donner l'écriture sous forme matricielle de B^{-1}.

d) Soit x un réel quelconque. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a: $[M(x)]^n = M(nx)$.

Application numérique

On donne $B = M(4)$. Donner l'écriture sous forme matricielle de B^{10}.

Exercice 3 *Suites et séries numériques*

On se propose d'étudier la série numérique qui a permis à l'écossais Néper (ou Napier) de construire la première table de logarithmes pour se rendre capable de calculer aisément des puissances du nombre $(1+t)$ avec t élément de $]0,1[$ cruciales dans le cadre de l'évaluation des intérêts composés bancaires. On pourra admettre tout résultat intermédiaire pour poursuivre la résolution de l'exercice.

On considère un réel x quelconque et on pose pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ et } S_k(x) = \sum_{n=0}^{k} u_n(x).$$

On se propose d'étudier pour tout x réel la convergence de la série $(\sum u_n(x))$.

3.1 *Etude de cas particuliers*

a) On pose $x = 0$. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $u_n(0) = 0$. En déduire que pour tout k de $\mathbb{N}$: $S_k(0) = 0$ et que par suite $(\sum u_n(0))$ est convergente.

b) On pose $x = -1$. Montrer que $(\sum u_n(-1))$ est au signe près la série harmonique et que par suite, elle diverge.

c) On pose $x = 1$. Déterminer pour tout n de $\mathbb{N}$ l'expression de $u_n(1)$. En déduire que $(\sum u_n(1))$ est une série alternée dont on montrera qu'elle est convergente.

3.2 *Etude du cas général*

On suppose désormais que x n'appartient pas à $\{0, -1, 1\}$.

a) Montrer qu'on peut étudier la série $(\sum u_n(x))$ par critère de d'Alembert.

b) Fournir pour tout n de $\mathbb{N}$ l'expression simplifiée de $|u_{n+1}(x)/u_n(x)|$.

c) Montrer que:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| \right) = |x| \,.$$

d) En déduire selon x la convergence de $(\sum u_n(x))$ pour x non élément de $\{0, -1, 1\}$.

3.3 *Bilan*

Déduire de l'étude précédente pour quelles valeurs de x la série $(\sum u_n(x))$ converge ou diverge.