Utbm mt45, xt45 **Examen médian: durée 2 heures** **Automne 2013**

Nb : On rédigera absolument les exercices sur des copies séparées. Tout résultat d'une question intermédiaire pourra être admis pour permettre la poursuite d'un exercice.

Exercice 1 *Nombres complexes et suites numériques*

Nb : On change de feuille, svp.

Le plan affine P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On donne le point M_0 d'affixe $z_0 = x_0 + iy_0$; plus généralement on notera pour tout entier n de $\mathbb{N}$, M_n le point d'affixe $z_n = x_n + iy_n$.

1.1 On considère la similitude s de centre O, de rapport $k = 1/2$ et d'angle $\theta = \pi/2$.

a) Soit M d'affixe z et $M' = s(M)$ d'affixe z'. Ecrire z' en fonction de z.

b) En déduire qu'en posant $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ on a l'égalité matricielle:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ avec } S = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

c) On pose $M_1 = s(M_0)$ puis $M_2 = s(M_1)$ et plus généralement $M_{n+1} = s(M_n)$ pour tout entier naturel n.

Ecrire matriciellement $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ en fonction de S et $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ en fonction de S et $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et plus généralement $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ en fonction de S et $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

d) On pose désormais $z_0 = 4 + 4i$. Représenter dans le même repère M_0, M_1, M_2 et M_3.

1.2 On note pour tout entier k de $\mathbb{N}$, $P(k)$ la propriété formulée comme suit:

$$P(k) : \left\{ \begin{array}{l} \text{Les matrices } S^{2k} \text{ et } S^{2k+1} \text{ sont données par:} \\ S^{2k} = \begin{pmatrix} (-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \end{pmatrix} \text{ et } S^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -(-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} \\ (-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} & 0 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

Démontrer par récurrence que pour tout k de $\mathbb{N}$, $P(k)$ est vraie.

1.3 *Application dans les métiers de l'ingénieur*

a) Déduire de $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = S^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ l'écriture de x_n et y_n en fonction de x_0 et y_0 selon la parité de n. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes vers des limites à déterminer.

b) On donne un réel strictement positif ε. Déterminer en fonction de ε le plus petit entier n à partir duquel on a: $|x_n| < \varepsilon$ et $|y_n| < \varepsilon$.

c) Lors de la réalisation d'un clip, on impose un mouvement de spirale fermée au point M_0 - en pratique à un motif géométrique contenant M_0 - comme décrit ci-dessus, par la génération des points successifs M_n. Montrer comment il est inutile de générer un trop grand nombre d'itérés de M_0 en fonction de la résolution de l'écran de tracé.

.../...

Exercice 2 *Séries numériques*

Nb : On change de feuille, svp.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par:

$$u_n = \frac{2}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}.$$

2.1 En utilisant les critères de convergence, montrer que la série $(\sum u_n)$ est convergente.

2.2 Démontrer qu'il existe des entiers relatifs α, β et γ à déterminer, tels que pour tout entier naturel n on ait:

$$u_n = \frac{\alpha}{(n+1)} + \frac{\beta}{(n+2)} + \frac{\gamma}{(n+3)}.$$

2.3 En ajoutant membre à membre les expressions issues de 2.2, déterminer l'écriture explicite de la somme partielle $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$.

2.4 En déduire que la série $(\sum u_n)$ est convergente et déterminer sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

2.5 Pour tout x réel on pose: $v_n(x) = u_n x^n$. Etudier selon x la convergence de la série $(\sum v_n(x))$.

Exercice 3 *Développement de Taylor-Lagrange pour étude d'un phénomène chaotique*

Nb : On change de feuille, svp.

On considère la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par: $E_n = \sum_{k=0}^{n} 1/k!$.

3.1 Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer qu'on peut appliquer le théorème de Taylor-Lagrange à l'ordre n à la fonction exponentielle sur $[0,1]$. En déduire qu'il existe un réel $c \in]0,1[$ tel que:

$$e = E_n + \frac{e^c}{(n+1)!}.$$

b) Démontrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq e - E_n \leq \frac{e}{(n+1)!}.$$

3.2 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = e - 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_n = nu_{n-1} - 1$.

a) Démontrer par récurrence que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (e - E_n)\,n!.$$

b) En déduire que: $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n \leq e/(n+1)$ et la convergence de (u_n) vers une limite à préciser.

3.3 On perturbe la suite (u_n) en modifiant très légèrement son premier terme. On considère donc la suite (v_n) définie par: $v_0 = u_0 + \varepsilon$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $v_n = nv_{n-1} - 1$.sachant que ε est un réel quelconque de $\mathbb{R}^{+*}$, aussi petit qu'on veut.

a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + \varepsilon n!$.

b) Etudier la convergence de la suite (v_n).

c) Interpréter brièvement le résultat obtenu.