Utbm mt45, xt45 Examen médian: durée 2 heures Automne 2014

Nb : On rédigera absolument les exercices sur des copies séparées. Tout résultat d'une question intermédiaire pourra être admis pour permettre la poursuite d'un exercice.

Exercice 1 *Suites et séries*

Nb : On change de feuille, svp.

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par:

$$u_1 = 1/2 \text{ et la relation de récurrence } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1.1 *Etude de la suite* (u_n)

a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - x^2$.

b1) Etudier les variations de f sur $[0, 1/2]$.

b2) En déduire que: $\forall x \in [0, 1/2] \quad f(x) \in [0, 1/2]$.

b3) En conclure que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a: $0 \leq u_n \leq 1/2$.

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite; calculer l.

1.2 *Etude de la série* $(\sum u_n)$

a) Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$on a:

$$\frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n^2}.$$

N.B: La preuve est assez technique. On pourra pour résoudre les deux inéquations proposées étudier le signe d'un trinôme du deuxième degré.

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$on a:

$$\frac{1}{2n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$

c) En déduire la nature de la série $(\sum u_n)$.

1.3 *Etude de la série* $\left(\sum u_n^2\right)$

a) En utilisant les inégalités des questions 1.2a) et 1.2b), fournir une majoration pour tout entier k de $\mathbb{N}^*$ de u_k^2.

b) En déduire que:

$$u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2 \leq 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

c) Quelle est la nature de $\left(\sum u_n^2\right)$?

.../...

Exercice 2 *Multiplication de matrices par blocs et algorithme de Strassen*

Nb : On change de feuille, svp.

Cet exercice a pour but de présenter un algorithme efficace (c'est-à-dire économe en coût) pour calculer le produit de deux matrices réelles. Lors d'un tel calcul, les multiplications de réels coûtent nettement plus de ressources machine que les additions.

Dans une première partie on étudie la technique du produit matriciel par blocs, dans la seconde on applique cette technique pour l'étude de l'algorithme.

2.1 *Partie 1: Produit matriciel par blocs*

2.1.1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ une matrice de $M_2(\mathbb{R})$. Montrer que $A^2 = 5A + I_2$ où I_2 désigne la matrice unité de $M_2(\mathbb{R})$.

2.1.2 En déduire que A est inversible et fournir A^{-1}.

2.1.3 *Produit par blocs*

Soit n de $\mathbb{N}^*$. On considère A et B deux matrices de $M_{2n}(\mathbb{R})$ données comme suit:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \text{ et } B = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right).$$

Les blocs A_{11}, ...,B_{22} sont des matrices de taille $n \times n$, donc éléments de $M_n(\mathbb{R})$.

Le calcul du produit $C = A \times B$ peut se faire par blocs à paritr des produits des matrices $A_{ik} \times B_{kj}$ de la manière suivante:

$$C = \left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} \times B_{11} + A_{12} \times B_{21} & A_{11} \times B_{12} + A_{12} \times B_{22} \\ \hline A_{21} \times B_{11} + A_{22} \times B_{21} & A_{21} \times B_{12} + A_{22} \times B_{22} \end{array}\right).$$

a) Calculer par blocs $M^2 = M \times M$ où M est la matrice de $M_4(\mathbb{R})$ définie par:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

N.B : On identifiera précisément les blocs M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22} et on utilisera les résultats de la question 2.1.1.

b) En déduire que $M^2 = 5M + 2I_4$ où I_4 est la matrice unité de $M_4(\mathbb{R})$.

c) *Généralisation*

On considère maintenant une matrice M de taille $2n \times 2n$, élément de $M_{2n}(\mathbb{R})$, telle que $M = \left(\begin{array}{c|c} M_{11} & O_n \\ \hline O_n & M_{22} \end{array}\right)$, où O_n désigne la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$ et M_{11}, M_{22} sont des matrices de $M_n(\mathbb{R})$.

Donner une condition sur les matrices M_{11}et M_{22} pour que M soit inversible.

2.2 *Partie 2: Algorithme de Strassen*

Dans cette partie on s'intéresse aux nombres de multiplications de réels effectuées lorsqu'on calcule le produit de deux matrices. L'algorithme de Strassen présenté ici permet de diminuer ce nombre.

2.2.1 *Cas des matrices* 2×2

On considère deux matrices de $M_2(\mathbb{R})$, A et B. Leur produit C est donné par:

$$C = \left(\begin{array}{c|c} c_{11} & c_{12} \\ \hline c_{21} & c_{22} \end{array}\right) = A \times B = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} b_{11} & b_{12} \\ \hline b_{21} & b_{22} \end{array}\right).$$

.../...

a) Combien de multiplications de réels sont nécessaires pour calculer tous les coefficients c_{ij} grâce à la définition du produit matriciel vue en cours ?

b) On considère les produits de réels suivants:

$$\text{(Formules de Strassen)}\quad \begin{cases} q_1 = (a_{11} - a_{12})\, b_{22} \\ q_2 = (a_{21} - a_{22})\, b_{11} \\ q_3 = a_{22}\,(b_{11} + b_{21}) \\ q_4 = a_{11}\,(b_{12} + b_{22}) \\ q_5 = (a_{11} + a_{22})\,(b_{22} - b_{11}) \\ q_6 = (a_{11} + a_{21})\,(b_{11} + b_{12}) \\ q_7 = (a_{12} + a_{22})\,(b_{21} + b_{22}) \end{cases}$$

Vérifier qu'on retrouve la matrice C en effectuant les opérations suivantes:

$$\begin{array}{ll} c_{11} = q_1 - q_3 - q_5 + q_7 & c_{12} = -q_1 + q_4 \\ c_{21} = q_2 + q_3 & c_{22} = -q_2 - q_4 + q_5 + q_6 \end{array}$$

c) Conclure que les formules de Strassen permettent de calculer le produit $A \times B$ en effectuant 7 multiplications de réels. Qu'a-ton gagné ?

2.2.2 *Cas des matrices* $n \times n$ avec $n = 2^k$

a) Soit deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{R})$, avec $n = 2^k$ $(k \geq 1)$. On découpe ces matrices en blocs; les sous-matrices sont alors de taille $2^{k-1} \times 2^{k-1}$. Ainsi

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right),\ B = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right) \quad \text{et} \quad C = A \times B = \left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right).$$

Ecrire les formules de Strassen par blocs et vérifier qu'elles permettent de calculer C.

b) Soit u_k le nombre de multiplications de réels nécessaires pour calculer le produit de deux matrices A et B de tailles $2^k \times 2^k$. Montrer que si on applique les formules de Strassen on a: $u_k = 7u_{k-1}$.

c) En utilisant toujours la méthode de Strassen, que vaut u_1 ?

d) En déduire qu'on utilise $u_k = 7^k$ multiplications de réels pour évaluer le produit de deux matrices de taille $2^k \times 2^k$.

e) On pose $n = 2^k$. Montrer que $u_k = n^{\ln(7)/\ln(2)}$ et que $u_k \simeq n^{2{,}81}$.

N.B: On pourra poser $u_k = n^\alpha$ et chercher à déterminer α.

f) Si on applique la méthode classique vue en cours pour calculer le produit de deux matrices A et B de taille $n \times n$ combien de multiplications de réels (en fonction de n) sont-elles nécessaires ?

g) *Application numérique*

Pour multilier deux matrices de taille 128×128, combien de multiplications de réels économise-t-on en utilisant les formules de Strassen à la place du calcul classique ?

Remarque

Le cas général où A et B sont des matrices de taille $n \times n$ avec $2^{k-1} < n < 2^k$ se résout en complétant les matrices initiales par des zéros de manière à constituer des "boîtes englobantes" de taille $2^k \times 2^k$.