FINAL

Tous documents (sauf livres) et calculatrices autorisés. Les résultats intermédiaires non démontrés pourront être utilisés tout au long du devoir. Le barème, donné à titre indicatif, prendra en compte la longueur du sujet.

UNE COPIE PAR EXERCICE

Exercice 1 (8 points)

Soit $\mathbf{V}$ *le champ de vecteurs défini en coordonnées cartésiennes par :*

$$\mathbf{V}(x,\ y,\ z) = \begin{pmatrix} V_1(x,\ y,\ z) \\ V_2(x,\ y,\ z) \\ V_3(x,\ y,\ z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{z}{x} + \dfrac{y}{z} \\ \dfrac{x}{z} \\ ln\ x - \dfrac{xy}{z^2} + \dfrac{1}{z} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Partie A :

1. *Calculer,* $\nabla \cdot \mathbf{V}$*, la divergence de* $\mathbf{V}$*.*

2. *Calculer,* $\nabla \wedge \mathbf{V}$*, le rotationnel de* $\mathbf{V}$*.*

3. *En déduire que* $\mathbf{V}$ *dérive d'un potentiel* ϕ*.*

4. *Déterminer (à une constante scalaire près) ce potentiel* ϕ*.*

Partie B : *Soit* $\mathbf{W}$ *le champ de vecteurs défini en coordonnées cartésiennes par :*

$$\mathbf{W}(x,\ y,\ z) = \begin{pmatrix} W_1(x,\ y,\ z) \\ W_2(x,\ y,\ z) \\ W_3(x,\ y,\ z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{z}{x} \\ \dfrac{y^2 x}{z^3} \\ \dfrac{1}{z} \end{pmatrix} \tag{2}$$

1. *Calculer*

- **a.** $\nabla \cdot \mathbf{W}$*, la divergence de* $\mathbf{W}$*.*
- **b.** $\nabla \wedge \mathbf{W}$*, le rotationnel de* $\mathbf{W}$*.*

2. *Déterminer,* $\nabla \cdot (\mathbf{W} - \mathbf{V})$*, la divergence de* $\mathbf{W} - \mathbf{V}$*.*

3. *Le champ* $\mathbf{W} - \mathbf{V}$ *dérive-t-il*

- **a.** *d'un potentiel scalaire ?*
- **b.** *d'un potentiel vecteur ?*

4. *Montrer qu'il existe un champ de vecteurs* $\mathbf{B}(x,\ y,\ z)$ *tel que :*

$$\mathbf{W}(x,\ y,\ z) = \nabla \wedge \mathbf{B}(x,\ y,\ z) + \boldsymbol{\nabla}\phi(x,\ y,\ z)$$

Changer de copie

Exercice 2 (6 points)

Soit Ω le domaine délimité par les droites et courbes d'équations $y = -x - 4$, $y = x - 4$, $y = (x+4)^2$ et $y = (x-4)^2$ et tel que $-4 \leqslant x \leqslant 4$.

1. *Représenter géométriquement le domaine Ω.*
2. *Écrire ce domaine sous forme de domaine de Fubini (indication : on pourra décomposer $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ et fournir une description de Fubini des deux domaines Ω_1 et Ω_2).*
3. *Ω est assimilé à une plaque d'épaisseur nulle. La densité surfacique de cette plaque est une fonction constante définie sur Ω par $\rho(x,y) = 2$.*
   - **a.** *Calculer la masse de Ω.*
   - **b.** *On cherche les coordonnées du centre de gravité de Ω, noté $G(x_G; y_G)$. Par définition on sait :*
   $$x_G = \frac{\int\int_\Omega x\rho(x,y)dxdy}{\int\int_\Omega \rho(x,y)dxdy} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\int\int_\Omega y\rho(x,y)dxdy}{\int\int_\Omega \rho(x,y)dxdy}$$
   Sans calcul et en fournissant une argument de nature géométrique déterminer x_G.
   - **c.** *Calculer y_G.*

Changer de copie

Exercice 3 (8 points)

On considère trois suites numériques (u_n), (v_n) et (w_n) telles que $u_0 = -3$, $v_0 = 1$, $w_0 = 0$ et

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n \\ v_{n+1} &= u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} &= 3u_n + 2w_n \end{cases} \tag{3}$$

On note X_n le vecteur de $\mathbb{R}^3$ définit par $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

1. *Donner les coordonnées de X_0.*
2. *Montrer que le vecteur X_n vérifie une relation de récurrence $X_n = AX_{n-1}$ où A est la matrice suivante donnée dans la base canonique :*
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{4}$$
3. *Déterminer les valeurs propres de A. En déduire que A est diagonalisable.*
4. *Déterminer une base de vecteurs propres et la matrice de passage associée (on ne demande pas de calculer P^{-1}).*
5. *Donner D la matrice diagonale telle que $A = PDP^{-1}$.*
6. *On introduit un vecteur Y_n défini par $Y_n = P^{-1}X_n$.*
   - **a.** *Montrer que $Y_n = DY_{n-1}$.*
   - **b.** *Calculer D^n exprimer Y_n en fonction de D^n et Y_0.*
   - **c.** *Calculer Y_0 (on ne calculera pas P^{-1} mais on résoudra à la place un système linéaire).*
   - **d.** *En déduire Y_n.*
   - **e.** *Retrouver X_n et donner ainsi les valeurs numériques des trois suites (u_n), (v_n) et (w_n).*

Correction

Exercice 1

1. *Calcul de la divergence de* $\mathbf{V}$. *On a :*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V}(x,y,z) &= \frac{\partial V_1}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial V_2}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial V_3}{\partial z}(x,y,z)\\ &= -\frac{z}{x^2}+0+\frac{2xy}{z^3}-\frac{1}{z^2}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V}(x,y,z)=-\frac{z}{x^2}+\frac{2xy}{z^3}-\frac{1}{z^2}}$$

2. *Calcul de ,* $\nabla\wedge\mathbf{V}$.

$$\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{V}(x,y,z)=\begin{pmatrix}\frac{\partial V_3}{\partial y}(x,y,z)-\frac{\partial V_2}{\partial z}(x,y,z))\\ \frac{\partial V_1}{\partial z}(x,y,z)-\frac{\partial V_3}{\partial x}(x,y,z)\\ \frac{\partial V_2}{\partial x}(x,y,z)-\frac{\partial V_1}{\partial y}(x,y,z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{x}{z^2}+\frac{x}{z^2}\\ \frac{1}{x}-\frac{y}{z^2}-\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{z^2}\right)\\ \frac{1}{z}-\frac{1}{z}\end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{V}(x,y,z)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}}$$

3. *On en déduit que* $\mathbf{V}$ *dérive d'un potentiel c'est 'a dire qu'il existe un champ scalaire* $\phi(x,y,z)$ *tel que :*

$$\boldsymbol{\nabla}\phi(x,\ y,\ z)=\boldsymbol{V}(x,\ y,\ z)$$

Ce que nous pouvons aussi écrire :

$$\boldsymbol{V}(x,\ y,\ z)=\begin{pmatrix}V_1(x,\ y,\ z)\\ V_2(x,\ y,\ z)\\ V_3(x,\ y,\ z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y,z)\\ \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y,z)\\ \frac{\partial\phi}{\partial z}(x,y,z)\end{pmatrix}$$

4. *On regarde la seconde composante :*

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y,z)=V_2(x,\ y,\ z)=\frac{x}{z}$$

On int'egre alors par rapport à y pour obtenir :

$$\phi(x,y,z)=\frac{yx}{z}+\phi_1(x,z)$$

On regarde la première composante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y,z) = V_1(x,\ y,\ z) = \frac{z}{x} + \frac{y}{z}$$

On sait aussi d'apr'es la question (4) que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y,z) = \frac{y}{z} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x,z)$$

Soit en identifiant les équations :

$$\frac{y}{z} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x,z) = \frac{z}{x} + \frac{y}{z}$$

Ceci conduit à,

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x,z) = \frac{z}{x}$$

On obtient alors après intégration par rapport à x :

$$\phi_1(x,z) = z \ln x + \phi_2(z)$$

– *On regarde la dernière composante :*

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x,y,z) = V_3(x,\ y,\ z) = ln\ x - \frac{xy}{z^2} + \frac{1}{z}$$

On sait aussi d'après la question (5) que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{xy}{z^2} + \ln x + \frac{\partial \phi_2}{\partial z}(z)$$

Soit en identifiant les équations :

$$-\frac{xy}{z^2} + \ln x + \frac{\partial \phi_2}{\partial z}(z) = ln\ x - \frac{xy}{z^2} + \frac{1}{z}$$

Soit encore,

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial z}(z) = \frac{1}{z}$$

Soit en intégrant par rapport à z :

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial z}(z) = \ln z + c_2$$

Finalement, nous avons :

$$\boxed{\phi(x,y,z) = \frac{yx}{z} + z \ln x + \ln z + c_2}$$

Partie 2

1. *On calcule la divergence de W.*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{W}(x,y,z) &= \frac{\partial W_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial W_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial W_3}{\partial z}(x,y,z) \\ &= -\frac{z}{x^2} + \frac{2yx}{z^3} - \frac{1}{z^2} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{W}(x,y,z) = -\frac{z}{x^2} + \frac{2xy}{z^3} - \frac{1}{z^2}}$$

2. *Calcul de ,* $\nabla \wedge \mathbf{W}$.

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{W}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial W_3}{\partial y}(x,y,z) - \dfrac{\partial W_2}{\partial z}(x,y,z)) \\ \\ \dfrac{\partial W_1}{\partial z}(x,y,z) - \dfrac{\partial W_3}{\partial x}(x,y,z) \\ \\ \dfrac{\partial W_2}{\partial x}(x,y,z) - \dfrac{\partial W_1}{\partial y}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3y^2x}{z^4} \\ \\ \frac{1}{x} \\ \\ \frac{y^2}{z^3} \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{W}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{3y^2x}{z^4} \\ \\ \frac{1}{x} \\ \\ \frac{y^2}{z^3} \end{pmatrix}}$$

3. *On a :*

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{W} - \mathbf{V}) &= \nabla \cdot \mathbf{W} - \nabla \cdot \mathbf{V} \\ &= -\frac{z}{x^2} + \frac{2xy}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \left(-\frac{z}{x^2} + \frac{2xy}{z^3} - \frac{1}{z^2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{\nabla \cdot (\mathbf{W} - \mathbf{V}) = \mathbf{0}}$$

4. *En utlisant un théorème du cours on a :*

$$\mathbf{W} - \mathbf{V} = \nabla \wedge \mathbf{B}$$

Soit encore,

$$\begin{aligned} \mathbf{W} - \mathbf{V} &= \nabla \wedge \mathbf{B} \\ \mathbf{W} &= \mathbf{V} + \nabla \wedge \mathbf{B} \\ \mathbf{W} &= \boldsymbol{\nabla}\phi(x,\ y,\ z) + \nabla \wedge \mathbf{B} \end{aligned}$$

Exercice 2

1. *Faire dessin*

2. $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ *avec* $\Omega_1 = \{(x,y), -4 \leqslant x \leqslant 0, -x-4 \leqslant y \leqslant (x+4)^2$ *et* $\Omega_2 = \{(x,y), 0 \leqslant x \leqslant 4, x-4 \leqslant y \leqslant (x-4)^2\}$.

3. **a.** $\iint_\Omega \rho(x,y)dxdy = \iint_\Omega 2dxdy = 2\iint_{\Omega_1} dxdx + 2\iint_{\Omega_2} dxdy = 4\iint_{\Omega_1} dxdy = 4\int_{-4}^{0}(\int_{-x-4}^{(x+4)^2} 1dydx = 4\int_{-4}^{0}(x+4)^2 - (-x-4)dx = 4\int_{-4}^{0} x^2 + 5x + 20dx = [\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 20x]_{-4}^{0} = \frac{736}{3}$

b. *Le domaine est symmétrique par rapport à l'axe* (Oy) *et la fonction densité surfacique est constante (donc symmétrique). On en déduit que* $x_G = 0$.

c. *Calculons* $\iint_\Omega y \times 2dxdy = 2\iint_{\Omega_1} ydxdy + 2\iint_{\Omega_2} ydxdy = 2\int_{-4}^{0}\int_{-x-4}^{(x+4)^2} ydydx + 2\int_0^4\int_{x-4}^{(x-4)^2} ydydx = 2\int_{-4}^{0}[y^2]_{-x-4}^{(x+4)^2}dx + 2\int_0^4[y^2]_{x-4}^{(x-4)^2}dx = \int_{-4}^{0}(x+4)^4 - (-x-4)^2dx + \int_0^4 (x-4)^4 - (x-4)^2dx = \frac{5504}{15}$

Exercice 3

1. $X_0 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ *et* $AX_{n-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u_{n-1} \\ u_{n-1} - v_{n-1} + w_{n-1} \\ 3u_{n-1} + 2w_{n-1} \end{pmatrix}$. *Le système est donc bien équivalent à* $X_n = AX_{n-1}$.

3. $p_A(\lambda) = -(-1-\lambda)[(3-\lambda)(2-\lambda)$ *d'où* $\lambda = -1, 2, 3$. *On a trois valeurs propres distinctes donc* A *est diagonalisable.*

4. *Le calcul des vecteurs propres donne :*

- $\lambda = -1$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\lambda = 2$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $\lambda = 3$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

d'où $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

5. *La matrice* D *telle que* $A = PDP^{-1}$ *est* $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6. **a.** $Y_n = P^{-1}X_n = P^{-1}AX_{n-1} = P^{-1}PDP^{-1}X_{n-1} = DY_{n-1}$.

b. $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ *et* $Y_n = DY_{n-1} = D^2Y_{n-2} = \dots D^nY_0$.

c. $Y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ *est solution de* $PY_0 = X_0$, *ce qui donne* $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

d. *D'où* $Y_n = \begin{pmatrix} (-1)^n \\ 3 \times 2^n \\ -3^{n+1} \end{pmatrix}$.

e. *Enfin* $X_n = PY_n = \begin{pmatrix} -3^{n+1} \\ (-1)^n + 3 \times 2^n - 3^{n+1} \\ 9 \times 2^n - 3^{n+2} \end{pmatrix}$.