FINAL

Tous documents (sauf livres) et calculatrices autorisés. Les résultats intermédiaires non démontrés pourront être utilisés tout au long du devoir. Le barème, donné à titre indicatif, prendra en compte la longueur du sujet.

UNE COPIE PAR EXERCICE

Exercice 1 (5 points)

On pose pour tout entier $p \geqslant 1$,

$$I_p = \int_1^e x^2(\ln(x))^p dx \tag{1}$$

où e désigne $e^1 = exp(1)$.

1. *Justifier sans calculs que pour tout $p \geqslant 1$, on a $I_p \geqslant 0$.*

2. *À l'aide d'une intégration par partie calculer I_1.*

3. *Montrer que pour tout p, on a la relation suivante $I_{p+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{p+1}{3} I_p$.*

4. *En déduire I_2 et I_3.*

5. *Montrer que (I_p) est une suite décroissante. Que peut-on en déduire ?*

Changer de copie

Exercice 2 (8 points)

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A *On considère l'intégrale double suivante :*

$$\iint_\Omega \frac{x^2 y}{x^2+y^2} dxdy$$

avec Ω le domaine du plan défini par les inéquations suivantes

- $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9$
- $y - x \geqslant 0$
- $x \geqslant 0$

1. *Représenter préciément le domaine Ω dans le plan muni d'un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.*

2. *Calculer $\iint_\Omega \frac{x^2 y}{x^2+y^2} dxdy$ en utilisant le changement de variables en coordonnées polaires.*

Partie B *Calcul d'une aire définie par une courbe. On considère la courbe Γ (voir Figure 1) d'équations paramétriques,*

$$(\Gamma) \left\{ \begin{array}{lcl} x(\theta) & = & 4\cos(\theta) - \cos(4\theta) \\ y(\theta) & = & 4\sin(\theta) - \sin(4\theta) \end{array} \right.$$

(ces équations donnent en fonction du paramètre θ les positions des points $(x(\theta), y(\theta))$ de Γ). On note D le domaine défini par cette courbe. Le but de l'exercice est de calculer l'aire de D en utilisant un système de coordonnées qui définit un changement de variables adapté à la courbe.

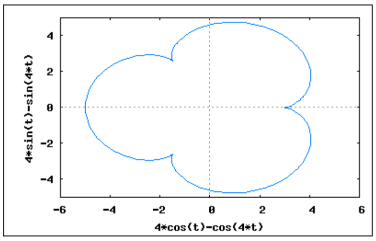

FIGURE 1 – Courbe Γ (une cardioïde)

1. *Calculer la Jacobienne de l'application* $\phi : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$\phi(r,\theta) = (r(4\cos(\theta) - \cos(4\theta)), r(4\sin(\theta) - \sin(4\theta)))$$

2. *Montrer que le jacobien de* ϕ *est égal à*

$$jac(\phi) = 20r(1 - \cos(3\theta))$$

(indication : on pourra utiliser au cours du calcul la simplification suivante, $\cos(\theta)\cos(4\theta) + \sin(\theta)\sin(4\theta) = \cos(3\theta)$*).*

3. *Déterminer* $\Delta \subset \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$ *tel que* $\phi(\Delta) = D$*.*

4. *Calculer l'aire de* D *(on admettra que* ϕ *est un changement de variables).*

Exercice 3 (8 points)

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A : *On considère* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ *une matrice à coefficient réels symétrique.*

1. *Calculer le polynôme caractéristique de* A*.*

2. *Démontrer que* A *est toujours diagonalisable.*

Partie B : *On considère la matrice* $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ *qui représente un endomorphisme de* $E = \mathbb{R}^3$ *exprimé dans la base canonique notée* (e_1, e_2, e_3)*.*

1. *Déterminer le polynôme caractéristique de* M*.*

2. *En déduire que* $1, 2$ *et* 3 *sont les valeurs propres de* M*. Pourquoi peut-on dire que* M *est diagonalisable ?*

3. *Chercher une base de vecteur propres* (v_1, v_2, v_3) *(en prenant les valeurs propres par ordre croissant) et déterminer la matrice de passage* P *de la base canonique à la base des vecteurs propres.*

4. *Donner la matrice* D *représentant l'endomorphisme défini par* M *dans la base des vecteurs propres et rappeler la relation liant* M, P *et* D*.*

5. *Calcul de* P^{-1}*.*

- **a.** *Exprimer les vecteurs* e_1, e_2 *et* e_3 *comme combinaison linéaire des vecteurs* v_1, v_2 *et* v_3 *(on pourra partir des combinaisons de* e_1, e_2, e_3 *qui définissent* v_1, v_2 *et* v_3*).*
- **b.** *En déduire* P^{-1}*.*

Corrections

Exercice 1

1. *$x \mapsto x^2$ est une fonction positive et $x \mapsto \ln(x)$ est positive pour tout $x \in [1,e]$. Donc $x \mapsto x^2(\ln(x))^p$ est positive sur $[1,e]$ et par conséquent $I_p \geqslant 0$ car c'est l'intégrale d'une fonction positive.*

2. *$I_1 = \int_1^e x^2\ln(x)dx$. On pose $u' = x^2$ et $v = \ln(x)$ donc $u = \dfrac{x^3}{3}$ et $v' = \dfrac{1}{x}$. En effectuant une intégration par partie il vient*

$$I_1 = [\frac{x^3}{3}\ln(x)]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\times\frac{1}{x}dx = \frac{e^3}{3} - \int_1^e \frac{x^2}{3}dx = \frac{e^3}{3} - [\frac{x^3}{9}]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}$$

3. *$I_{p+1} = \int_1^e x^2(\ln(x))^{p+1}dx$. Là aussi une intégration par partie permet d'obtenir la réponse. Pour cela on pose encore une fois : $u' = x^2$ et $v = \ln(x)^{p+1}$. Il vient alors $u = \dfrac{x^3}{3}$ et $v' = (p+1)\ln(x)^p\dfrac{1}{x}$. D'où*

$$I_{p+1} = [\frac{x^3}{3}\ln(x)^{p+1}]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\times(p+1)\ln(x)^p\frac{1}{x}dx = \frac{e^3}{3} - (p+1)\int_1^e \frac{x^2}{3}\ln(x)^p dx = \frac{e^3}{3} - \frac{(p+1)}{3}I_p$$

4. $I_2 = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{2}{3}I_1 = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{2}{3}(\dfrac{2}{9}e^3 + \dfrac{1}{9}) = \dfrac{5}{27}e^3 - \dfrac{2}{27}$. $I_3 = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{3}{3}(\dfrac{5}{27}e^3 - \dfrac{2}{27}) = \dfrac{4}{27}e^3 + \dfrac{2}{27}$.

5. *$I_{p+1} - I_p = \int_1^e x^2\ln(x)^{p+1}dx - \int_1^e x^2\ln(x)^p dx = \int_1^e x^2\ln(x)^p(1-\ln(x))dx$. Or pour tout $x \in [1,e]$ on a $\ln(x) \leqslant 1$. Donc $x^2\ln(x)^p(1-\ln(x)) \leqslant 0$ pour tout $x \in [1,e]$ ce qui implique que $\int_1^e x^2\ln(x)^p(1-\ln(x))dx \leqslant 0$ c'est-à-dire $I_{p+1} - I_p \leqslant 0$. La suite (I_p) est donc bien décroissante. On sait par ailleurs que la suite est minorée (quesiton 1). Donc par le théorème de la convergence monotone cette suite est nécessairement convergente (décroissante et minorée).*

Exercice 2

Partie A :

1. *Faire le dessin de la portion de couronne correspondant à Ω.*

2. *On utilise le changement de coordonnées polaires $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$. Le domaine Δ envoyé sur Ω par ce changement de variables est $\Delta = [1,3]\times[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$. En effet les contraintes $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 9$ impliquent que le rayon r vérifie $1 \leqslant r \leqslant 3$ et les contraintes $x \geqslant 0$ et $y \geqslant x$ impliquent que $\theta \in [\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$. On a alors*

$$I = \iint_\Omega \frac{x^2y}{x^2+y^2}dxdy = \iint_\Delta \frac{r^2\cos^2(\theta)r\sin(\theta)}{r^2}rdrd\theta$$

Or $\displaystyle\iint_\Delta \frac{r^2\cos^2(\theta)r\sin(\theta)}{r^2}rdrd\theta = \int_1^3(\int_{\pi/4}^{\pi/2} r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta)d\theta)dr = \int_1^3 r^2[-\frac{\cos^3(\theta)}{3}]_{\pi/4}^{\pi/2}dr = \int_1^3 r^2\frac{(\sqrt{2}/2)^3}{3}dr = [\frac{r^3}{3}\frac{\sqrt{2}}{12}]_1^3 = \frac{13\sqrt{2}}{18}$

Partie B :

1. *Calcul de la Jacobienne*

$$J(\phi) = \begin{pmatrix} 4\cos(\theta) - \cos(4\theta) & r(-4\sin(\theta) + 4\sin(4\theta)) \\ 4\sin(\theta) - \sin(4\theta) & r(4\cos(\theta) - 4\cos(4\theta)) \end{pmatrix}$$

2. *D'où le jacobien est* $jac(\phi) = det(J) = 16r\cos^2(\theta) - 16r\cos(\theta)\cos(4\theta) - 4r\cos(4\theta)\cos(\theta) + 4r\cos^2(4\theta) - (-16r\sin^2(\theta) + 16r\sin(\theta)\sin(4\theta) + 4r\sin(\theta)\sin(4\theta) - 4r\sin^2(4\theta)) = r(20 - 20\cos(\theta)\cos(4\theta) - 20\sin(\theta)\sin(4\theta)) = 20r(1 - \cos(3\theta))$.

3. *En utilisant les nouvelles coordonnées, le domaine* Δ *envoyé sur* D *par changement de variables est*

$$\Delta = [0,1] \times [0, 2\pi]$$

4. *L'aire du domaine* D *peut donc se calculer en utilisant le changement de variables défini par* ϕ.

$$\mathcal{A} = \iint_D dxdy = \iint_\Delta 20r(1 - \cos(3\theta))drd\theta$$

D'où l'aire est donnée par $\mathcal{A} = \int_0^1 (\int_0^{2\pi} 20r(1 - \cos(3\theta))d\theta)dr = \int_0^1 [20r(\theta - \frac{\sin(3\theta)}{3}]_0^{2\pi} dr = \int_0^1 20r \times 2\pi dr = 40\pi \int_0^1 rdr = 40\pi[\frac{r^2}{2}]_0^1 = 20\pi$.

Exercice 3

Partie A

1. $p_A(\lambda) = (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a + c)\lambda - b^2 + ac$.

2. *Le polynôme caractéristique* p_A *a toujours deux racines distinctes puisque* $\Delta = (-(a + c))^2 - 4 \times 1 \times (-b^2 + ac) = (a - c)^2 + 4b^2 > 0$. *Donc la matrice* A *a deux valeurs propres distinctes elle est donc diagonalisable.*

Partie B

1. $p_M(\lambda) = -(\lambda - 3)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$.

2. *Les valeurs propres dons* $\lambda = 1, 2, 3$. *La matrice est diagonalisable car trois valeurs propres distinctes pour un endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$.

3. *Le calcul des vecteurs propres donne :* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $M = PDP^{-1}$.

5. *Calcul de* P^{-1}.

a. *On a* $v_1 = e_1 + e_3$, $v_2 = e_1 - e_3$ *et* $v_3 = e_1 - 2e_2 + e_3$. *On en déduit que* $e_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ *et* $e_3 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2)$ *d'où* $e_2 = \frac{1}{2}(v_1 - v_3)$.

b. *Ces relations donnent la matrice P^{-1} :*

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

6.