FINAL MT46

Durée 2 heures - Résumé de cours autorisé

UTBM 17 Janvier 2020

Exercice 1 : Système linéaire - 4 points

Soit le système linéaire dans $\mathbf{R}^3$ suivant, où k_1 et k_2 sont des nombres réels non nuls :

$$\begin{cases} (k_2 + \frac{k_1}{2})\, x - \frac{k_1}{2}\, y + \frac{k_1}{2}\, z & = 0 \\ -\frac{k_1}{2}\, x + k_1\, y & = 0 \\ \frac{k_1}{2}\, x + k_1\, z & = F \end{cases}$$

1. Faire une écriture matricielle de ce système linéaire.
2. Résoudre ce système linéaire pour trouver (x, y, z) en utilisant la méthode de Cramer.

Exercice 2 : Diagonalisation d'une matrice de contrainte en cisaillement - 4 points

La matrice des contraintes d'un solide en dimension 2 qui travaille en cisaillement s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \tau = \text{constante}$$

1. Calculer les deux invariants de la matrice $\underline{\underline{\sigma}}$.
2. Donner les contraintes principales de cette matrice, c'est-à-dire les valeurs propres de $\underline{\underline{\sigma}}$.
3. Donner les directions principales associées, c'est-à-dire les vecteurs propres de $\underline{\underline{\sigma}}$.
4. Ecrire la matrice $\underline{\underline{\sigma}}$ dans la base propre orthonormée.

Exercice 3 : Etude d'un cylindre à base circulaire en torsion - 6 points

Les axes O, x_1, x_2, x_3 sont orthonormés. On considère un barreau cylindrique de révolution autour de l'axe Ox_3 et dont les bases se trouvent dans les plans $x_3 = 0$ et $x_3 = H > 0$ et sont de rayon R. Ce barreau est en équilibre dans les conditions suivantes :

- matériau homogène et isotrope en isotherme,
- on travaille dans le cadre des hypothèses des petites perturbations,
- on néglige le poids propre,
- vecteur contrainte nul sur la surface latérale.
- on travaille dans la base cartésienne avec le système de coordonnées (x, y, z).

Le tenseur des contraintes est donné par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mu\,\alpha\,y \\ 0 & 0 & \mu\,\alpha\,x \\ -\mu\,\alpha\,y & \mu\,\alpha\,x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mu \text{ et } \alpha = \text{constantes}$$

1. Montrer que les équations d'équilibre statique sont vérifiées, c'est-à-dire que :

$$\underline{div\,\underline{\underline{\sigma}}} + \underline{0} = \underline{0}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

2. Calculer le vecteur contrainte relatif à la facette de normale z, défini par :

$$\vec{T} = \underline{\underline{\sigma}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Calculer $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{T}$ avec :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

4. Calculer $\vec{M}_{/0}$, le moment par rapport au point O des efforts exercés sur la surface S_0 qui correspond au plan $z = 0$ et qui est un disque de centre O et de rayon R, on admet que :

$$\vec{M}_{/0} = \int\int_{M \in S_0} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T}\, ds$$

Je vous conseille de passer en coordonnées polaires c'est-à- dire de poser :

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

CHANGER DE COPIE

Exercice 4 : 4 points

On considère un écoulement permanent défini dans un repère $(0, x, y, z)$ par le champs des vitesses suivant, en coordonnées cartésiennes :

$$\mathbf{V}(x,\ y,\ z) = \begin{pmatrix} V_1(x,\ y,\ z) \\ V_2(x,\ y,\ z) \\ V_3(x,\ y,\ z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3z \\ 0 \\ 3x - 2z \end{pmatrix}$$

1. Calculer le rotationnel du champs de vecteurs V.
2. Calculer la divergence du champs de vecteurs V.
3. Dérive-t-il d'un potentiel scalaire ?
4. Si oui, déterminer l'expression de ce potentiel en détaillant précisément les différentes étapes nécessaires.

Exercice 5 : 4 points

On cherche à calculer les coordonnées du centre de gravité du domaine D qui se trouve dans le demi-plan $y \geq 0$ et qui est limitée par la courbe $y^2 - 4x = 0$, la droite $x = 0$ et la droite $x = h$ ($h > 0$). On suppose que la densité surfacique est constante $\rho = 1$.

1. Représenter graphiquement le domaine D.
2. Calculer $\mathcal{A}$ l'aire de D.
3. Calculer les coordonnées $(x_G,\ y_G)$ du centre de gravité G_1 de D.