MEDIAN

Tous documents (sauf livres) et calculatrices autorisés. Les résultats intermédiaires non démontrés pourront être utilisés tout au long du devoir. Le barème prendra en compte la longueur du sujet.

UNE COPIE PAR EXERCICE

Exercice 1

Le but de cet exercice est d'utiliser les formules de Taylor pour trouver des valeurs approchées de la fonction exponentielle pour des valeurs données.

1. *Utiliser la formule de Taylor-Maclaurin pour montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout x réel on a*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n \qquad (1)$$

où $|R_n| \leqslant \dfrac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}$. *On notera* $p_n(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$

2. *On suppose que $x = 10^{-3}$.*

a. *Déterminer la plus petite valeur de n_1 telle que $|R_{n_1}| \leqslant 10^{-9}$ (indication : on pourra procéder à une recherche par tatonnement).*

b. *En déduire que $p_{n_1}(10^{-3})$ est une approximation à 10^{-9} près de $e^{10^{-3}}$.*

c. *Calculer $p_{n_1}(10^{-3})$ et comparer avec le résultat donné par la machine à calculer pour évaluer $e^{10^{-3}}$.*

3. *On suppose maintenant que $x = 2.001$.*

a. *Déterminer la plus petite valeur de n_2 telle que $|R_{n_2}| \leqslant 10^{-9}$.*

b. *En déduire que $p_{n_2}(2.001)$ est une approximation à 10^{-9} près de $e^{2.001}$.*

c. *Quel commentaire peut-on faire par rapport à la question précédente ?*

4. *On suppose connaître e^2 à 10^{-9} près. Comment peut-on déterminer une approximation de $e^{2.001}$ à 10^{-9} près de manière plus efficace que par la méthode précédente ? Exposer un plan d'étude pour mettre en place ce calcul (on ne demande pas de faire le calcul mais de préciser les étapes et résultats que vous utiliseriez pour le réaliser).*

Changer de copie

Exercice 2

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

Partie A : Changement de variables.

Calculer

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+2)(x^2+1)} dx$$

(indication : on pourra d'abord procéder au changement de variables $u = x^2$).

Partie B : Suite définie par une intégrale.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *on pose* $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$ *et on notera* $e = e^1$.

1. *Calculer* I_0 *et* I_1.
2. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $I_{n+1} = I_n - \dfrac{1}{(n+1)!}$ *et en déduire que* (I_n) *est une suite décroissante.*
3. *Montrer que* $I_n \geqslant 0$. *Que peut-on dire sur la convergence de* (I_n) *?*
4. *Montrer que* $I_n \leqslant \dfrac{e}{n!}$ *en déduire la limite de* (I_n).
5. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $I_n = e - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$. *Calculer alors* $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$.

Changer de copie

Exercice 3

Le but de l'exercice est de calculer la puissance d'une matrice et d'utiliser ce résultat dans un calcul de suites récurrentes.

On considère une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *donnée par* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On remarque que $M = A + B$ *avec* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. *On rappelle la formule de Newton* $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ *avec* $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$. *À quelle condition sur* a *et* b *cette formule est-elle valide ?*
2. *Montrer que* $AB = BA$.
3. *Calculer* B^3. *En déduire* B^n *pour* $n \geqslant 3$.
4. *Justifier que la formule du binôme de Newton est valide pour calculer* M^n.
5. *En déduire que* $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & n(n-1)+3n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. *Retrouver ce résultat en faisant une démonstration par récurrence.*
7. *Application : On considère trois suites* (x_n), (y_n) *et* (z_n) *définies par les relations de récurrences suivantes :*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + y_n + \frac{3}{2}z_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}z_n \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n \end{cases} \qquad (2)$$

Avec $x_0 = 200$, $y_0 = 100$ *et* $z_0 = 1000$.

Calculer x_{10} *à l'aide des questions précédentes.*

Exercice 1

Exercice 2

Partie A

Le changement de variables $u = x^2$ donne :

variable	*bornes*	*élément différentiel*
$u = x^2$	$0 \to 0$	$du = 2xdx$
	$1 \to 1$	

d'où par le théorème du changement de variables on obtient

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+2)(x^2+1)}dx = \int_0^1 \frac{1/2}{(u+2)(u+1)}du$$

Décomposons $\frac{1}{(u+2)(u+1)}$ *en éléments simples. Le dénominateur étant factorisé on sait que la décomposition sera de la forme*

$$\frac{1}{(u+2)(u+1)} = \frac{A}{u+2} + \frac{B}{u+1} \tag{3}$$

On détermine A et B par les techniques usuelles (voir TD) on trouve $A = -1$ et $B = 1$.

On a donc $\int_0^1 \frac{1/2}{(u+2)(u+1)}du = \frac{1}{2}(\int_0^1 -\frac{1}{u+2} + \frac{1}{u+1}du = \frac{1}{2}[-\ln(2+u) + \ln(1+u)]_0^1 = \frac{1}{2}(-\ln(3) + \ln(2) + \ln(2) - \ln(1)) = \ln(2) - \frac{1}{2}\ln(3)$.

Partie B

1. $I_0 = e - 1$ *et* $I_1 = e - 2$.
2. *On montre le résultat par intégration par partie :* $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 \underbrace{(1-t)^{n+1}}_{=u}\underbrace{e^t}_{=v'}dt = \frac{1}{(n+1)!}[\underbrace{(1-t)^{n+1}}_{=u}\underbrace{e^t}_{=v}]_0^1 - \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 \underbrace{(n+1)(1-t)^n(-1)}_{=u'}\underbrace{e^t}_{=v}dt = -\frac{1}{(n+1)!} + I_n$. *On en déduit que* $I_{n+1} - I_n = -\frac{1}{(n+1)!} \leqslant 0$ *donc* $I_{n+1} \leqslant I_n$ *la suite est décroissante.*
3. *L'intégrale d'une fonction positive étant positive on en déduit $I_n \geqslant 0$ pour tout n. La suite (I_n) est décroissante et minorée donc convergente.*
4. *Pour tout $t \in [0,1]$ on a $(1-t)^n \leqslant 1$ donc on en déduit que $(1-t)^n e^t \leqslant e^t$ pour tout $t \in [0,1]$. En intégrant il vient $\int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leqslant \int_0^1 e^t dt = e - 1 \leqslant e$ d'où en multipliant par $\frac{1}{n!}$ on obtient $I_n \leqslant \frac{e}{n!} \to_{n\to\infty} 0$, i.e. $I_n \to 0$.*
5. *On utilise le résultat de la question 2 de manière itérée :* $I_n = I_{n-1} - \frac{1}{n!} = I_{n-2} - \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = \cdots = I_0 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. *Or on sait par ce qui précède que $I_n \to 0$ donc on en déduit que* $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$.

Exercice 3

1. *La formule du binôme est valide si et seulement si a et b commutent, i.e. $ab = ba$.*
2. *On vérifie que dans les deux cas $AB = BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (on remarque que A est la matrice identité et donc le résultat est trivial par définition de l'identité).*
3. *Un calcul rapide montre que $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que pour tout $n \geqslant 3, B^n = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.*
4. *A et B commutent (question 2) donc $M^n = (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$.*
5. *On sait que $B^n = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ pour $n \geqslant 3$ et $A = I_3$, ce qui simplifie la somme précédente : $M^n = (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} I_3 B^k = I_3 + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2$. Or $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où $M^n = I_3 + nB + \dfrac{n(n-1)}{2} B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2n & n(n-1)+3n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.*
6. *Par récurrence on vérifie la propriété au rang $n = 1$ (on peut aussi faire $n = 0$). Ce qui donne $M^1 = M = \begin{pmatrix} 1 & 2\times 1 & 1\times 0 + 3\times 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

   Ensuite on suppose la propriété vraie au rang n et on montre qu'elle est encore vraie au rang $n+1$ en calculant M^{n+1}. Pour cela on remarque que $M^{n+1} = M \times M^n$ et on utilise l'hypothèse de récurrence pour écrire M^n (ensuite il n'y a plus qu'à faire un produit matriciel. A faire...).
7. *On vérifie que le système sécrit matriciellement sous la fome $U_{n+1} = \dfrac{1}{2} M U_n$ avec $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ et M est la matrice du problème. On remarque alors en itérant que :*

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \frac{1}{2} M U_n \\ &= \frac{1}{2} M\left(\frac{1}{2} M U_{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{2} M\left(\tfrac{1}{2} M\left(\frac{1}{2} M U_{n-2}\right)\right) \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{2^n} M^{n+1} U_0 \end{aligned} \tag{4}$$

avec $U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. Pour calculer x_{10} on utilise la relation $U_{10} = \dfrac{1}{2^{10}} M^{10} U_0$. Ce qui donne

$$\begin{pmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{pmatrix} = \frac{1}{1024} \begin{pmatrix} 1 & 20 & 90 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 1000 \end{pmatrix} = \frac{1}{1024} \begin{pmatrix} 90400 \\ 10100 \\ 1000 \end{pmatrix} \tag{5}$$

d'où $x_{10} = \dfrac{2825}{32}$.