Exercice 1

On rappelle que tout quaternion est confondu avec le quadruplet de ses composantes dans la base $B=(1,i,j,k)$, via l'isomorphisme fondateur. On se propose de prouver l'associativité du produit $*$ dans l'ensemble H des quaternions, c'est-à-dire prouver la propriété (A) suivante :

$$\forall\,(u,v,w)\in H^3 \quad u*(v*w)=(u*v)*w \qquad (A)\,.$$

On suppose disposer d'une primitive *produit* renvoyant le produit de deux quaternions quelconques.

1.1 Est-il possible de prouver (A) informatiquement, par considération des quadruplets précités ?

1.2 *Réductions premières*

a) Constater qu'établir (A) revient à en faire la preuve pour les seuls éléments de la base B, en raison de la définition du produit des quaternions.

b) Montrer que dès que l'un des u,v,w est 1, (A) est trivialement vraie.

c) *Bilan*

- En déduire qu'établir (A), c'est prouver :

$$\forall\,(u,v,w)\in\{i,j,k\}^3 \quad u*(v*w)=(u*v)*w \qquad (R_1)\,.$$

- Combien reste-t-il à établir d'égalités, pour démontrer (R_1)?
- Peut-on mener une telle preuve informatiquement ?

1.3 *Deuxième réduction*

a) Montrer que la preuve de toute égalité de la forme $u*(v*w)=(u*v)*w$ dans (R_1), permet d'en déduire deux autres, par permutation circulaire.

b) Combien reste-t-il d'égalités à établir pour prouver (R_1) ?

c) Montrer que la preuve de (R_1) se réduit par conséquent à celle de la propriété (R_2) définie par :

$$\forall\,(v,w)\in\{i,j,k\}^2 \quad i*(v*w)=(i*v)*w \qquad (R_2)\,.$$

1.4 *Fin de preuve*

a) Montrer que la preuve de (R_2) peut se ramener à celle d'une égalité de deux matrices carrées de côté 3, constituées de quaternions.

b) Proposer le plan d'un algorithme réalisant cette preuve, utilisant la primitive *produit*.

Exercice 2 *Formule de Moivre et quaternions*

L'objet de l'exercice est de montrer le caractère indispensable d'une réflexion avant l'application de "formules" en image.

On rappelle ci-dessous la formule de Moivre pour les quaternions; sa preuve, obtenue par récurrence en deux temps, ou par induction n'est pas l'objet de l'exercice.

Pour tout quaternion unitaire pur I, pour tout argument θ de $[0,\pi]$, et tout n de $\mathbb{Z}$, on sait que :

$$(\cos\theta + I\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + I\sin(n\theta)\,.$$

2.1 On considère le quaternion $p = e^{k\frac{3\pi}{4}}$.

- Fournir son expression algébrique.
- Calculer p^2 et fournir son écriture polaire. La formule de Moivre appliquée à p donne–t-elle une écriture polaire licite du quaternion p^2 ?

2.2 Fournir un algorithme *puissance* (r, I, θ, n) qui,

- à partir du quaternion non réel $q = re^{I\theta}$, donné sous forme polaire (licite!), et de l'entier relatif n
- renvoie l'écriture polaire de q^n.
  Nb : on pourra distinguer le cas n pair et n impair.

2.3 Faire le choix d'un quaternion h d'écriture polaire $h = e^{j\theta}$, avec $\theta \in]\pi/2, \pi[$.

- Calculer la matrice R_1 de la rotation vectorielle associée à h. En déduire R_1^2.
- Utiliser l'algorithme produit sous 2.2 et déterminer "géométriquement" la matrice R_2 de rotation associée à h^2, grâce aux axe et angle trouvés.
- Comparer les résultats obtenus.

Exercice 3 *Projection perspective*

L'espace est rapporté au repère othonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère la projection perspective de matrice projective P donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y & 0 \\ \sin\theta_x \sin\theta_y & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \cos\theta_y & 0 \\ -\cos\theta_x \sin\theta_y & \sin\theta_x & \cos\theta_x \cos\theta_y & 0 \\ \frac{\cos\theta_x \sin\theta_y}{z_C} & -\frac{\sin\theta_x}{z_C} & -\frac{\cos\theta_x \cos\theta_y}{z_C} & 1 \end{pmatrix},$$

où l'on choisit : $\theta_x = \pi/4$, $\theta_y = -\pi/4$ et $z_C = 10$.
On la fait suivre bien sûr, pour l'obtention du dessin sur l'écran, de la projection orthographique en z.

3.1 Déterminer les trois points de fuite principaux par leurs coordonnées sur l'écran.

3.2 On considère le cube tronqué défini par les points de coordonnées précisées ci-dessous :

$$B_0\,(0,0,0)\,;B_1(0,0,4); B_2(4,0,4); B_3(4,0,0); H_0(0,4,0); H_1(0,4,4); H_2(2,4,4); H_3(4,4,2); H_4(4,4,0).$$

Représenter le cube tronqué.

3.3 *Création de l'image du cube tronqué par la projection perspective*

- Représenter sur l'écran les points de fuite principaux.
- Fournir l'image du cube tronqué sur ce même écran, en indiquant la démarche suivie et les arguments géométriques utilisés destinés à minimiser le nombre de calculs effectués. On s'intéressera en particulier aux diverses interprétations permettant d'obtenir les images des points H_2 et H_3.