Exercice 1 *Etude de transformations affines du plan*

On rapporte le plan affine au repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Les deux sous-questions suivantes sont indépendantes.

1.1 *Etude d'un glissement*

On considère un glissement g connu par sa matrice projective G.

a) Fournir la forme de la matrice G et indiquer ses caractéristiques.

b) Fournir une écriture de g comme composée de deux isométries classiques.

c) Déduire de b) l'écriture simplifiée de $g^2 = g \circ g$, en fonction des isométries considérées. Quelle est la nature de g^2 ?

d) *Applications*

On suppose un glissement g connu par sa seule matrice projective G.

- Déduire de c) une manière nouvelle de déterminer la translation liée à g.
- Comment disposer le plus simplement possible de la direction du miroir ? La méthode proposée permet-elle de conclure dans tous les cas ?
- Bilan
  Proposer une méthode simplifiée permettant de fournir les éléments géométriques d'un glissement donné par sa seule matrice projective G.

1.2 On considère la rotation affine r de centre O et d'angle $\theta = 2\pi/5$; on note s la symétrie orthogonale de miroir $D = \left(O, \overrightarrow{j}\right)$.

a) Montrer géométriquement que O est invariant pour $s \circ r$.

b) Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (p, q), le point O est invariant par l'isométrie affine $f_{p,q}$ s'écrivant :

$$f_{p,q} = s^p \circ r^q.$$

Quelle sont les natures possibles des transformations $f_{p,q}$?

c) Etudier la nature de $f_{p,q}$ en fonction de p et q.

Exercice 2 *Etude de projections parallèles*

L'espace E est rapporté au repère othonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On considère la projection parallèle p_θ suivant la direction $\overrightarrow{u_\theta}$ dont les composantes U_θ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ sont données par :

$${}^tU_\theta = (\cos\theta \; 0 \; \sin\theta).$$

On définit p_θ comme suit. A tout point $m\,(x, y, z)$ de E on associe le point $p_\theta(m) = M$ situé dans le plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ tel que $\overrightarrow{mM}$ soit dans le plan vectoriel engendré par $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}\right)$ et colinéaire à $\overrightarrow{u_\theta}$.

2.1 Déterminer la matrice projective P_θ de p_θ relativement au repère choisi.

Nb : On pourra faire intervenir la projection orthogonale de m sur le plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

.../...

2.2 *Cas particuliers clasiques*

Fournir les valeurs particulières de P_θ pour θ donné par : $\theta = \theta_1 = \pi/4$ puis pour $\theta = \theta_2 = arcos\,(1/2)$.

2.3 *Etude de l'effet de p_{θ_1} sur les distances*

On pose pour cette sous-question $\theta = \theta_1$.

- Démontrer que p_{θ_1} conserve les distances de tout segment $[m_1 m_2]$ de direction $\overrightarrow{k}$.
- Quel est l'effet de p_{θ_1} sur les distances des segments de direction $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ respectivement ?
- Bilan
  Quel est l'intérêt de la transformation p_{θ_1} ?

Exercice 3 *Projection perspective*

L'espace est rapporté au repère othonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère la projection perspective de matrice projective P donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y & 0 \\ \sin\theta_x \sin\theta_y & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \cos\theta_y & 0 \\ -\cos\theta_x \sin\theta_y & \sin\theta_x & \cos\theta_x \cos\theta_y & 0 \\ \frac{\cos\theta_x \sin\theta_y}{z_C} & -\frac{\sin\theta_x}{z_C} & -\frac{\cos\theta_x \cos\theta_y}{z_C} & 1 \end{pmatrix},$$

où l'on choisit : $\theta_x = \pi/4$, $\theta_y = -\pi/4$ et $z_C = 10$.
On la fait suivre bien sûr, pour l'obtention de l'image sur l'écran, de la projection orthographique en z.

3.1 Indiquer quelle est la position de l'oeil ou de la caméra correspondant aux données choisies pour z_C, θ_x et θ_y.

3.2 Déterminer les trois points de fuite principaux pf_{100}, pf_{010}, et pf_{001},par leurs coordonnées sur l'écran.Les représenter graphiquement dans $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

3.3 *Etude d'une direction particulière*

- Vers quel point pf fuit la direction $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{k}$?
- Représenter pf dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Que représente pf relativement aux points de fuite principaux ?