Utbm mt51 **Examen final** **Printemps 2010**

Exercice 1 *Etude de transformations affines du plan grâce aux matrices projectives*

On rapporte le plan au repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1.1 *Etude de transformations de base*

a) Déterminer la matrice projective du glissement $g_1 = s_{D_1} \circ t_{\overrightarrow{u_1}}$ où le miroir est la droite $D_1 = \left(O, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$ et le vecteur translation $\overrightarrow{u_1}$ est donné par $\overrightarrow{u_1} = 2\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$.

b) Déterminer la matrice projective du glissement $g_2 = s_{D_2} \circ t_{\overrightarrow{u_2}}$ où le miroir est la droite $D_2 = \left(A, \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right)$ avec $A\,(2,0)$ et $\overrightarrow{u_2}$ est donné par $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$.

c) *Vérifications*

- Déterminer les images par g_1 et g_2 du point $E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
- Vérifier que les résultats des calculs sont cohérents avec une approche purement géométrique.

1.2 *Etude de la composée $g_2 \circ g_1$*

a) En utlisant uniquement des arguments géométriques, déterminer la nature de la transformation $g_2 \circ g_1$?

b) Déterminer la matrice projective de la transformation $g_2 \circ g_1$.

c) Retrouver les résultats annoncés dans le a) en les précisant.

Exercice 2 *Etude de projection perspective à trois points de fuite*

2.1 *Notations*

On rapporte l'espace à un repère orthonormé direct $R = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On considère la projection perspective $f = p_z \circ p_3$, de matrice projective F donnée dans le repère considéré, par :

$$F = P_z P_3 \quad \text{avec} \quad P_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y & 0 \\ \sin\theta_x \sin\theta_y & \cos\theta_x & -\sin\theta_x\cos\theta_y & 0 \\ -\cos\theta_x \sin\theta_y & \sin\theta_x & \cos\theta_x\cos\theta_y & 0 \\ \frac{\cos\theta_x \sin\theta_y}{z_C} & -\frac{\sin\theta_x}{z_C} & -\frac{\cos\theta_x\cos\theta_y}{z_C} & 1 \end{bmatrix}$$

On se propose d'étudier l'effet de p_3 et de f sur différents objets.

2.2 *Transformations d'objets élémentaires*

a) Déterminer les points de fuite principaux, respectivement notés $p_{f_{100}}, p_{f_{010}}, p_{f_{001}}$, des directions $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$, en fonction de z_C, θ_x, θ_y.

b) On donne pour la suite de l'exercice :

$$z_C = 10; \quad \theta_x = \frac{\pi}{4}; \quad \theta_y = -\frac{\pi}{4}.$$

b1) Déterminer les points de fuite principaux, relatifs aux données précédentes.

b2) On considère la section de pyramide, notée (S) définie par les points $\{m_1, ..., m_6\}$ donnés par:

i	1	2	3	4	5	6
x_i	1	1	1	3	3	3
y_i	0	1	0	0	3	0
z_i	0	0	1	0	0	3

Représenter dans le repère $R = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ l'objet étudié.

b3) Représenter dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ l'image de la forme choisie, ainsi que celle des points de fuite principaux $p_{f_{100}}, p_{f_{010}}, p_{f_{001}}$.

2.3 *Transformations de directions particulières*

a) *Rappels de notations et résultats*

- Soit Π un plan affine parallèle au plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}\right)$; on note I et K les matrices colonnes des coordonnées projectives de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{k}$ Soit alors deux points a et b de Π, de matrices colonnes de coordonnées homogènes respectives A et B.
- On rappelle qu'on définit sur l'ensemble des matrices colonnes une relation d'équivalence $\sim$ par :

$$M \sim N \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbf{R}^* \quad M = kN)\,.$$

La classe de M est alors notée $\overline{M}$.

b) *Etude de quelques objets*

b1) Que représente $\overline{B - A}$?

b2) Montrer qu'il existe deux réels λ et μ tels que $\quad B - A = \lambda I + \mu K$.

b3) Selon la nullité de $\lambda + \mu$, montrer que :

- soit $\overline{B - A} = \overline{K - I} \quad$;
- soit il existe t de $[0, 1]$ tel que $\quad \overline{B - A} = \overline{tI + (1 - t)K}$.

b4) Grâce à la prise en compte du produit $F\,(B - A)$, montrer que toute direction du plan Π est transformée par la perspective f

- soit en une direction à déterminer;
- soit "fuit " vers un point p_f à déterminer.

b5) Déterminer l'intersection de (S) avec le plan Π d'équation $y = 1/2$ et vérifier qu'elle représente une forme dont la frontière se comporte comme annoncé dans la question précédente.

b6) Quelle est l'image de la droite joignant les centres de gravités des faces triangulaires de (S) ? Proposer deux solutions distinctes dont vous vériferez la cohérence.

b7) Peut-on généraliser les résultats précédents ?