Exercice 1

On rappelle que tout quaternion est confondu avec le quadruplet de ses composantes dans la base $B=(1,i,j,k)$, via l'isomorphisme fondateur. On se propose de prouver l'associativité du produit $*$ dans l'ensemble $\mathbb{H}$ des quaternions, c'est-à-dire prouver la propriété (A) suivante:

$$(A) \qquad \forall\,(u,v,w)\in\mathbb{H}^3 \quad u*(v*w)=(u*v)*w.$$

On suppose disposer d'une primitive *produit* renvoyant le produit de deux quaternions quelconques.

1.1 Est-il possible de prouver (A) informatiquement, par considération des quadruplets précités ?

1.2 *Réduction première*

a) Constater qu'établir (A) revient à en faire la preuve pour les seuls éléments de la base B, en raison de la définition du produit des quaternions.

b) Montrer que dès que l'un des u,v,w est 1, (A) est trivialement vraie.

c) *Bilan*

- En déduire qu'établir (A), c'est prouver:

$$(R_1) \qquad \forall\,(u,v,w)\in\{i,j,k\}^3 \quad u*(v*w)=(u*v)*w.$$

- Combien reste-t-il à établir d'égalités, pour démontrer (R_1)?
- Peut-on mener une telle preuve informatiquement ?

1.3 *Deuxième réduction*

a) Montrer que la preuve de toute égalité de la forme $u*(v*w)=(u*v)*w$ dans (R_1), permet d'en déduire deux autres, par permutation circulaire.

b) Combien reste-t-il donc d'égalités à établir pour prouver (R_1) ?

c) Montrer que la preuve de (R_1) se réduit par conséquent à celle de la propriété (R_2) définie par :

$$(R_2) \qquad \forall\,(v,w)\in\{i,j,k\}^2 \quad i*(v*w)=(i*v)*w$$

1.4 *Fin de preuve*

a) Montrer que la preuve de (R_2) peut se ramener à celle d'une égalité de deux matrices carrées de côté 3, constituées de quaternions.

b) Proposer le plan d'un algorithme réalisant cette preuve, utilisant la primitive *produit*.

.../...

Exercice 2 *Etude de transformations affines du plan grâce aux matrices projectives*

On rapporte le plan au repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

2.1 *Etude de transformations de base*

a) Déterminer la matrice projective du glissement $g_1 = s_{D_1} \circ t_{\overrightarrow{u_1}}$ où le miroir est la droite $D_1 = \left(O, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$ et le vecteur translation $\overrightarrow{u_1}$ est donné par $\overrightarrow{u_1} = 2\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$.

b) Déterminer la matrice projective du glissement $g_2 = s_{D_2} \circ t_{\overrightarrow{u_2}}$ où le miroir est la droite $D_2 = \left(A, \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right)$ avec $A\,(2,0)$ et $\overrightarrow{u_2}$ est donné par $\overrightarrow{u_2} = 3\left(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right)$.

c) *Vérifications*

- Déterminer les images par g_1 et g_2 du point $E\,(1,1)$.
- Vérifier que les résultats des calculs sont cohérents avec une approche purement géométrique.

2.2 *Etude de la composée* $g_2 \circ g_1$

a) En utlisant uniquement des arguments géométriques, déterminer la nature de la transformation $g_2 \circ g_1$?

b) Déterminer la matrice projective de la transformation $g_2 \circ g_1$.

c) Retrouver les résultats annoncés dans le a) en les précisant.

Exercice 3 *Etude des transformations affines de l'espace*

On rapporte l'espace $\mathcal{E}$ au repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

On considère une matrice M donnée de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, dont on sait qu'elle est matrice projective de l'isométrie affine f de E relativement au repère $\mathcal{R}$.

En vous basant sur le théorème général de classification, fournir le plan complet et précis de l'analyse de la matrice M qui permet d'identifier la nature de la transformation f ainsi que ses éléments géométriques.