Exercice 1 *Etude des isométries affines du plan grâce aux matrices projectives*

On rapporte le plan au repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, auquel on rapporte les matrices projectives considérées. Soit une isométrie affine f du plan connue par sa matrice projective F.

1.1 *Rappel des résultats généraux*

Rappeler le théorème de classification des isométries affines du plan.

1.2 Soit F la matrice projective d'une isométrie affine directe du plan.

a) Montrer que f peut être de deux types géométriques.

b) Fournir le plan d'un algorithme $isoaffinepos(F)$ qui à partir de la matrice donnée F de f identifie la nature de f et détermine ses éléments géométriques.

1.3 Soit F la matrice projective d'une isométrie affine indirecte du plan.

a) Quelle est la nature générale de f? Quel en est un cas particulier important ?

b) Fournir le plan d'un algorithme $isoaffineneg(F)$ qui à partir de la matrice donnée F de f identifie la nature de f et détermine tous ses éléments géométriques.

1.4 *Application*

On considère la matrice projective F d'une transformation f du plan définie par:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Démontrer que f est une isométrie affine. Quelle est sa nature géométrique ?

b) Déterminer tous ses éléments géométriques.

Exercice 2 *Etude d'une transformation affine de l'espace et de ses composées*

On rapporte l'espace au repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

2.1 On considère la symétrie tournante s_t définie par $s_t = s_P \circ r$, où s_P désigne la symétrie orthogonale de miroir le plan $P = (O, \overrightarrow{n})$ avec $\overrightarrow{n}$ normé normal à Pet où r désigne la rotation d'angle $\pi/2$ et d'axe $D = (O, \overrightarrow{n})$. Fournir la matrice projective S_t de s_t.

2.2 On note h l'homothétie de centre O de rapport $\lambda = 1/2$.

a) Fournir la matrice projective H de h.

b) *Hors barème*

Si on souhaitait établir que dans l'écriture $h \circ s_P \circ r$ tous les éléments commutent, comment pourrait-on mener la preuve de façon à l'optimiser ?

c) On admet pour la suite le résultat antérieur du b).

.../...

2.3 On note f la transformation affine de l'espace définie par: $f = h \circ s_P \circ r$. On se propose d'étudier l'effet sur un motif de f et de ses composées f^n où f^n désigne pour tout entier naturel n la composée de f par elle-même n fois avec la convention complémentaire $f^0 = id$.

a) Fournir en fonction de l'entier naturel n une écriture simplifiée de f^n.

N.B: On étudiera en particulier la parité de n et sa congruence modulo 4.

b) Décrire de façon synthétique et précise l'effet de f^n sur un motif simple de l'espace, pour un entier n quelconque.

c) Décrire brièvement un scenario de traitement d'image utilisant les f^n.

Exercice 3 *Etude d'une projection perspective connue*

On rapporte l'espace à un repère orthonormé direct $R = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On considère la projection perspective p_3, de matrice projective P_3 donnée dans le repère considéré par :

$$P_3 = \begin{pmatrix} a & 0 & a & 0 \\ a^2 & a & -a^2 & 0 \\ -a^2 & a & a^2 & 0 \\ \frac{a^2}{z_C} & -\frac{a}{z_C} & -\frac{a^2}{z_C} & 1 \end{pmatrix} \text{ où } a = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } z_C = 10.$$

On se propose d'étudier l'effet de p_3 sur différents objets simples.

2.1 *Transformations des directions principales*

Déterminer les points de fuite principaux, respectivement notés $p_{f_{100}}, p_{f_{010}}, p_{f_{001}}$, des directions prinicipales $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$.

2.2 On considère les directions des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de composantes respectives U et V dans la base $B = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ données par: ${}^tU = (1\ 2\ -1)$ et ${}^tV = (-1\ 2\ 1)$.

a) Déterminer les points de fuite pf_u et pf_v respectivement associés aux directions $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

b) Soit $t = 1/2$ élément de $[0, 1]$. Déterminer le point de fuite $pf_{1/2}$ associé à la direction $w = t\overrightarrow{u} + (1-t)\overrightarrow{v}$. Que représente $pf_{1/2}$ pour pf_u et pf_v ?

c) Généraliser.