Utbm mt51 **Examen final** **Printemps 2014**

N.B : On pourra admettre tout résultat intermédiaire afin de poursuivre la résolution d'un exercice !

Exercice 1

L'objet de cet exercice est la mise en oeuvre d'outils utilisant les quaternions destinés à l'animation d'images.

1.1 *Lemmes techniques*

On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ des points A, B, C d'affixes respectives a, b, c tels que:

$$\begin{aligned} |a| &= |b| = |c| = 1 \\ \text{et } \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}\right) &= \alpha; \quad \left(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}}\right) = \beta \quad \text{avec } \alpha \neq 0 \text{ et } \beta \neq 0. \end{aligned}$$

a) Montrer que $a = ce^{-i\alpha}$ et $b = ce^{i\beta}$.

b) Montrer qu'il existe des réels λ et μ tels que: $c = \lambda a + \mu b$. En déduire, en cherchant λ et μ, que:

$$c \sin(\alpha + \beta) = a \sin \beta + b \sin \alpha.$$

1.2 *Interpolation de quaternions unitaires*

On rapporte l'espace affine $\mathcal{E}$ à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On considère deux quaternions purs unitaires distincts a' et b', vus comme vecteurs de $\mathcal{V}_3$ dans l'isomorphisme classique; on utilise alors dans le plan affine qu'ils définissent avec O les résultats du 1.1.

a) En notant $\widehat{(a', b')} = \theta$ donné, déterminer en fonction de a', b', θ et t ($t \in [0, 1]$) le quaternion pur unitaire $q(t)$ qui interpole linéairement de $q(0) = a'$ à $q(1) = b'$.

b) Indiquer brièvement comment utiliser ce résultat pour l'animation d'image en trois dimensions?

Exercice 2 *Etude de projection perspective à trois points de fuite principaux*

2.1 *Notations*

On rapporte l'espace $\mathcal{E}$ à un repère orthonormé direct $R = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On considère la projection perspective $f = p_z \circ p_3$, de matrice projective F donnée dans le repère considéré par:

$$F = P_z P_3 \quad \text{avec} \quad P_3 = \begin{pmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y & 0 \\ \sin\theta_x \sin\theta_y & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \cos\theta_y & 0 \\ -\cos\theta_x \sin\theta_y & \sin\theta_x & \cos\theta_x \cos\theta_y & 0 \\ \frac{\cos\theta_x \sin\theta_y}{z_C} & -\frac{\sin\theta_x}{z_C} & -\frac{\cos\theta_x \cos\theta_y}{z_C} & 1 \end{pmatrix}$$

On se propose d'étudier l'effet de p_3 et de f sur différents objets.

2.2 *Transformations d'objets élémentaires*

a) Déterminer les points de fuite principaux, respectivement notés $p_{f_{100}}, p_{f_{010}}, p_{f_{001}}$, des directions $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$, en fonction de z_C, θ_x, θ_y.

b) On donne pour la suite de l'exercice:

$$z_C = 10; \quad \theta_x = \frac{\pi}{4}; \quad \theta_y = -\frac{\pi}{4}.$$

b1) Montrer d'où est vue la scène, où sont positionnés la caméra ou l'oeil humain, dans le choix de données adopté.

b2) Déterminer les points de fuite principaux, relatifs aux données précédentes.

b3) On considère la section de pyramide, notée (S) définie par les points $\{m_1, ..., m_6\}$ donnés par:

i	1	2	3	4	5	6
x_i	1	1	1	3	3	3
y_i	0	1	0	0	3	0
z_i	0	0	1	0	0	3

Représenter dans le repère $R=\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ l'objet étudié.

b3) Représenter dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ l'image de la forme choisie, ainsi que celle des points de fuite principaux $p_{f_{100}}, p_{f_{010}}, p_{f_{001}}$.

2.3 *Transformations de directions particulières*

a) *Rappels de notations et résultats*

- Soit Π un plan affine parallèle au plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}\right)$; on note I et K les matrices colonnes des coordonnées projectives de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{k}$ Soit alors deux points a et b de Π, de matrices colonnes de coordonnées homogènes respectives A et B.
- On rappelle qu'on définit sur l'ensemble des matrices colonnes de dimension $(4,1)$ une relation d'équivalence $\sim$ par :
$$M \sim N \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbf{R}^* \quad M = kN)\,.$$
La classe de M est alors notée $\overline{M}$.

b) *Etude de quelques objets*

b1) Que représente $\overline{B - A}$?

b2) Montrer qu'il existe deux réels λ et μ tels que $\quad B - A = \lambda I + \mu K$.

b3) Selon la nullité de $\lambda + \mu$, montrer que :

- soit $\overline{B - A} = \overline{K - I}$;
- soit il existe t de $[0,1]$ tel que $\quad \overline{B - A} = \overline{tI + (1-t)K}$.

b4) Grâce à la prise en compte du produit $F\,(B - A)$, étudier la transformation par f de toute direction du plan

Exercice 3 *Etude d'un outil de détermination d'une hélice dans les isométries affines de l'espace*

On rapporte l'espace $\mathcal{E}$ à un repère orthonormé direct $R=\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On considère une transformation affine de $\mathcal{E}$, notée f, dont on suppose connaître la matrice projective F, relativement au repère choisi.

Réaliser l'étude qui conduit à l'algorithme complet fournissant grâce à l'analyse de la matrice F

- la vérification que f est une isométrie directe;
- la détermination complète et élégante de ses éléments géométriques.