Exercice 1 *Etude des isométries affines du plan grâce aux matrices projectives*

On rapporte le plan au repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, auquel on rapporte les matrices projectives considérées. Soit une isométrie affine f du plan connue par sa matrice projective F.

1.1 Soit F la matrice projective d'une isométrie affine directe du plan.

a) Montrer que f peut être de deux types géométriques.

b) Fournir le plan d'un algorithme $isoaffinepos(F)$ qui à partir de la matrice donnée F de f identifie la nature de f et détermine ses éléments géométriques.

1.2 Soit F la matrice projective d'une isométrie affine indirecte du plan.

a) Quelle est la nature générale de f ? Quel en est un cas particulier important ?

b) Fournir le plan d'un algorithme $isoaffineneg(F)$ qui à partir de la matrice donnée F de f identifie la nature de f et détermine tous ses éléments géométriques.

1.3 *Application*

On considère la matrice projective F d'une transformation f du plan définie par :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Démontrer que f est une isométrie affine. Quelle est sa nature géométrique ?

b) Déterminer tous ses éléments géométriques.

Exercice 2 *Transformation affine de l'espace*

On rapporte l'espace au repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On s'intéressera à une transformation f de l'espace, qui admettra pour matrice projective associée F élément de $M_4(\mathbb{R})$.

2.1 Rappeler les différentes parties constituant F, en précisant leurs rôles ainsi que leurs caractéristiques (plages de valeurs, propriétés, etc.)

2.2 On considère maintenant que f est la symétrie tournante définie par $f = s_P \circ r$, où s_P désigne la symétrie orthogonale de miroir le plan $P = (O, \overrightarrow{n})$ avec $\overrightarrow{n}$ normé normal à P et où r désigne la rotation d'angle $\pi/2$ et d'axe $D = (O, \overrightarrow{n})$.

Fournir la matrice projective F de cette symétrie tournante.

2.3 Etude réciproque : faire "parler" une matrice d'isométrie affine de l'espace. On se place dans la situation où F est connue.

a) En utilisant le théorème de classification des isométries affines de l'espace, établir ce que doit vérifier F pour être la matrice d'une symétrie tournante.

b) Décrire le processus qui permet d'extraire les caractéristiques de cette symétrie tournante. On identifiera les étapes et on indiquera brièvement les méthodes précises de résolution.

Exercice 3 *Etude de projection perspective à trois points de fuite principaux*

On rapporte l'espace $\mathcal{E}$ à un repère orthonormé direct $R=\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On considère la projection perspective $f = p_z \circ p_3$, de matrice projective F donnée dans le repère considéré, sous les notations du cours, par :

$$F = P_z P_3 \quad \text{avec} \quad P_3 = \begin{pmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y & 0 \\ \sin\theta_x \sin\theta_y & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \cos\theta_y & 0 \\ -\cos\theta_x \sin\theta_y & \sin\theta_x & \cos\theta_x \cos\theta_y & 0 \\ \frac{\cos\theta_x \sin\theta_y}{z_C} & -\frac{\sin\theta_x}{z_C} & -\frac{\cos\theta_x \cos\theta_y}{z_C} & 1 \end{pmatrix}$$

On fixe pour tout l'exercice les données suivantes :

$$z_C = 10; \quad \theta_x = \frac{\pi}{4}; \quad \theta_y = -\frac{\pi}{3}.$$

3.1 *Paramètres généraux*

a) Rappeler le lien existant entre une transformation appliquée à une scène et une transformation appliquée au point de vue (oeil, caméra).

b) Fournir par une représentation graphique simple, mais faisant apparaître tous les éléments indispensables, la position de la caméra associée aux paramètres choisis.

c) Déterminer pour les données choisies l'expression numérique de P_3.

NB : Dans tout l'exercice les calculs seront menés avec la totalité de la précision des outils de calcul utilisés, mais affichés avec deux décimales seulement.

c) Déterminer les points de fuite principaux, respectivement notés $p_{f_{100}}$, $p_{f_{010}}$, $p_{f_{001}}$, des directions $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$.

3.2 *Etude de l'image d'un objet donné*

a) On considère la facette triangulaire de l'espace (m_1, m_2, m_3) où les m_i sont définis par :

i	1	2	3
x_i	0	4	2
y_i	3	1	5
z_i	4	1	-4

Représenter dans le repère $R=\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ la facette étudiée, sans précision excessive ; l'objectif est seulement de disposer d'une allure de l'objet étudié.

b) Déterminer l'image (m'_1, m'_2, m'_3) de la facette sous l'action de f.

d) Représenter sur un même graphique $p_{f_{100}}$, $p_{f_{010}}$, $p_{f_{001}}$ ainsi que les images m'_i pour i élément de $\{1, 2, 3\}$.