Exercice 1 *Composition de rotations du plan, de centres distincts*

L'objet de cet exercice est d'établir, de façon "modernisée" en utilisant les théorèmes établis en cours, un résultat proposé par Euler.

On considère deux rotations affines r_1, de centre a_1 et d'angle θ_1,

et r_2, de centre a_2 etd'angle θ_2, avec $a_1 \neq a_2$. On note respectivement l_1 et l_2, les rotations vectorielles associées.

On se propose d'étudier $r_2 \circ r_1$.

1.1 *Généralités*

(a) Montrer que $r_2 \circ r_1$est une isométrie directe du plan. Quelle est son application linéaire associée?

(b) Conclure quant à la nature de $r_2 \circ r_1$ dans les deux cas suivants :

- $\theta_1 + \theta_2 = 0 \ \ (2\pi)$;
- $\theta_1 + \theta_2 \neq 0 \ \ (2\pi)$.

1.2 *Etude géométrique*

(a) On note Δ la droite $(a_1 a_2)$. Montrer qu'on peut écrire $r_1 = s_\Delta \circ s_D$, sachant que s_Δ désigne la symétrie orthogonale de miroir Δ.

(b) Montrer qu'on peut écrire $r_2 = s_{D'} \circ s_\Delta$.

(c) *Etude de* $r_2 \circ r_1$

- Déduire de ce qui précède l'expression de $r_2 \circ r_1$.
- Conclure quant à la nature de $r_2 \circ r_1$ lorsque $\theta_1 + \theta_2 = 0 \ \ (2\pi)$.
- Montrer que $r_2 \circ r_1$ est une rotation lorsque $\theta_1 + \theta_2 \neq 0 \ \ (2\pi)$. Quel est son centre ?
- Représenter graphiquement les différents éléments géométriques évoqués : a_1, a_2, D, D', Δ, dans les deux cas considérés.

1.3 Fournir un plan précis mais sobre de l'étude du même problème, abordé sous la seule optique des matrices projectives.

1.4 *Mise en oeuvre dans un cas particulier*

On rapporte le plan P au repère orthonormé direct $\left(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On considère $a_1\,(0,1)$ et $a_2\,(4,5)$.

(a) Fournir la matrice projective R_1 de la rotation r_1 de centre a_1 et d'angle $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$.

(b) Fournir la matrice projective R_2 de la rotation r_2 de centre a_2 et d'angle θ_2 quelconque.

(c) *Etude de la composée* $r_2 \circ r_1$

- En déduire la matrice projective de $r_2 \circ r_1$. On la notera R.
- Que représente $r_2 \circ r_1$ dans le cas où $\theta_1 + \theta_2 = 0 \ \ (2\pi)$?
- Que représente $r_2 \circ r_1$ dans le cas où $\theta_1 + \theta_2 \neq 0 \ \ (2\pi)$? Comment déterminer le centre de rotation, vu les données dont on dispose ?

(d) Au vu de cette étude, que penser des mérites comparés de la géométrie et du calcul ?

.../...

Exercice 2 *Jeux de miroirs!*

Notations et conditions initiales

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Le paramètre t désigne le temps; l_1 et l_2 des reéls positifs donnés.

Soit $m_0\,(x_0, y_0)$ un point donné de P.

On considère le vecteur $\overrightarrow{u_0(t)}$ d'origine m_0 dont l'angle polaire, dépendant du temps, est noté $\theta_0(t)$. On impose :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u_0(t)}}\right) = \theta_0(t) = \frac{\pi}{2}t.$$

Soit alors $m_1(t)$ et $m_2(t)$ deux points du plan (variables avec le temps) tels que le segment $[m_1(t)m_2(t)]$ tourne autour de son point m_0 fixe conformément aux notations antérieures sachant que

$$m_1(t)m_0 = l_1 \text{ et } m_0m_2(t) = l_2.$$

Ainsi à tout instant t on a : $\overrightarrow{m_1(t)m_2(t)} = (l_1 + l_2)\,.\overrightarrow{u_0(t)}$.

1.1 *Appropriation des notations*

c On considère une source lumineuse S_0 d'où on envoie à l'instant t, un rayon de lumière assimilé à une droite.$(S_0, \overrightarrow{u})$.

- Déterminer le point d'intersection I_t du rayon lumineux et du plan du miroir (a'_0, b'_0, c'_0, d'_0)
- On suppose disposer d'une routine *test_appartenance* (m) capable de caractériser l'appartenance d'un point m au rectangle (a'_0, b'_0, c'_0, d'_0) Sur quel principe pourrait être fondée une telle routine?
- Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur donné non nul de V_3. En supposant que *test_appartenance* (I_t) est vraie, déterminer le rayon réfléchi $\left(I_t, \overrightarrow{u'}\right)$de $(S_0, \overrightarrow{u})$ dans le miroir (a'_0, b'_0, c'_0, d'_0); on déterminera $\overrightarrow{u'}$, en fonction des données fournies.

1.2 *Généralisation*

Mettre en place le plan de la suite de l'étude qui permet de traiter le rayon réfléchi issu de 1.1 et d'envisager qu'il va se réfléchir sur un deuxième miroir plan (a'_1, b'_1, c'_1, d'_1) roté d'un rectangle (a_1, b_1, c_1, d_1) par une rotation $r_{1,t}$ d'axe $\left(m_1, \overrightarrow{k}\right)$ et d'angle $\theta_1\,(t)$ variable avec le temps, où $m_1\,(x_1, y_1, z_1)$ désigne un point donné de E

1.3 *Prolongements*

Fournir un bref plan des problématiques connexes, permettant d'utiliser les outils mis en oeuvre dans les questions précédentes.