Exercice 1 *Etude des isométries affines du plan P*

On rapporte le plan à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, auquel on rapporte par défaut les différentes matrices projectives considérées.

1.1 *Etude de cas particuliers*

a) On considère la rotation r de centre $C\,(1,1)$ et d'angle $\pi/4$.

Déterminer la matrice projective R de r relativement au repère choisi.

b) On considère le glissement g de miroir la droite $D = \left(O, \overrightarrow{j}\right)$, et de vecteur translation $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{j}$.

- Déterminer la matrice projective G de g relativement au repère choisi.
- Déterminer par le calcul l'image $g\,(C)$ et vérifier géométriquement.

1.2 *Décomposition des isométries affines en produits de symétries orthogonales*

a) Rappeler la nature des diverses isométries affines du plan.

b) Soit f une isométrie affine quelconque du plan.

- Par l'analyse des différents cas qui peuvent se présenter, démontrer que f peut toujours s'écrire comme une composée de k symétries orthogonales avec $1 \leq k \leq 3$.
- Caractériser parmi les différents cas, les écritures qui correspondent aux isométries directes et indirectes respectivement.
- A-t-on unicité de la décomposition proposée ? Argumenter.

Exercice 2 *Etude du mouvement simplifié d'une toupie en rotation*

On rapporte l'espace affine à un repère orthonormé direct $R = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$; on note B la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ de V_3. Les matrices projectives considérées sont relatives au repère R.

2.1 *Etude d'un vecteur* $\overrightarrow{n}\,(t)$ dépendant du temps.

On considère un réel strictement positif T_1 et on pose $\omega_1 = 2\pi/T_1$. On définit le vceteur $\overrightarrow{n}\,(t)$ de V_3 par ses composantes $N(t)$ dans B définies par :

$$N(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t) \\ \sin(\omega_1 t) \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- Représenter graphiquement $\overrightarrow{n}\,(t)$ pour $t = 0$ et $t = T_1/2$. On pourra choisir une origine en O pour le vecteur $\overrightarrow{n}\,(t)$.
- Quelle courbe parcourt l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{n}\,(t)$ d'origine O lorsque t varie ?
- Fournir la norme du vecteur $\overrightarrow{n}\,(t)$.

.../...

2.2 *Rotation d'axe* $D_t = (O, \overrightarrow{n}(t))$.

Soit T_2 un réel strictement positif; on pose $\omega_2 = 2\pi/T_2$.

a) Fournir en fonction de t, ω_1 et ω_2 la matrice projective R_t (relativement au repère R) de la rotation d'axe D_t et d'angle $\theta(t)$, défini par : $\theta(t) = \omega_2 t$.

b) *Utilisation des outils antérieurs pour la descrition du mouvement d'un point d'une toupie en rotation*

On donne en secondes, pour la fin de l'exercice $T_1 = 4$" et $T_2 = 0,1$".

Utiliser les outils développés antérieurement pour déterminer le mouvement en fonction du temps du point $M(t)$ d'une toupie d'axe D_t, défini par ses coordonnées dans R $(x(t), y(t), z(t))$, sachant que pour $t = 0$, $M(t = 0)$, situé dans le plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}\right)$, est défini conformément à la figure 1, sachant que $r = HM(t = 0)$ et $h = OH$ sont des réels positifs donnés.

c) Comment déterminer avec les outils de mt51, "l'ondulation" lors du mouvement de la toupie de la partie visible d'un cercle de couleur passant par $M(t)$, situé dans le plan orthogonal à $\overrightarrow{n}(t)$?

Figure 1