Exercice 1

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

On considère la rotation r de centre a et d'angle θ, où $a\,(x_a, y_a)$ est un point donné de P et θ un réel de $]-\pi, \pi]$.

1.1 *Détermination de la matrice projective* R *de* r

a) Fournir la matrice L dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$de l'application linéaire l associée à r.

b) Fournir la matrice projective de r relativement au repère $\left(a, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

c) En déduire la matrice projective R de r relativement au repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1.2 *Etude de* r^k pour $k \in \mathbb{N}$

Fournir, pour tout k de $\mathbb{N}$, la matrice projective de r^k; on note R_k son écriture simplifiée.

Nb : On pourra conjecturer le résultat et proposer une preuve par récurrence.

1.3 *Etude de l'ensemble* $G = \left\{r^k / k \in \mathbb{Z}\right\}$

a) Montrer que $(G, \circ)$ a une structure de groupe.

b) On considère un motif M_0 du plan et on fait opérer comme d'ordinaire en image $(G, \circ)$ sur le plan P via:

$$\varphi : \begin{array}{ccc} G \times P & \rightarrow & P \\ (\sigma, m) & \mapsto & \varphi\left[(\sigma, m)\right] = \sigma\,(m) \end{array}$$

Caractériser la propriété de θ qui produira le fait que le motif déduit de l'opération de G sur M_0 sera constitué d'un nombre fini seulement d'images.

c) Etudier la finitude du groupe $(G, \circ)$.

Exercice 2

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ considéré comme le repère par défaut des matrices projectives étudiées.

On suppose connu le théorème de caractérisation des isométries affines du plan. L'objet de l'exercice est de réaliser l'étude qui permettra à un ingénieur en image, d'analyser une matrice projective R d'isométrie affine f quelconque du plan pour l'identifier géométriquement afin d'obtenir des propriétés géométriques de f qui éviteront d'effectuer des calculs inutiles.

On se place dans un environnement de calcul capable d'effectuer les calculs standards, en particulier de résoudre des sytèmes linéaires et de fournir les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice L d'application linéaire l de l'espace des vecteurs du plan V_2.

2.1 *Rappel des résultats fondamentaux*

a) Soit f une isométrie affine du plan. Rappeler la nature de f selon que f est directe ou indirecte.

.../...

b) Rappeler pourquoi, lors d'un traitement d'image, il est certain qu'après composition de n isométries du plan f_1, $f_2, ..., f_n$, la composée $f = f_n \circ ... \circ f_1$ est encore une isométrie du plan P.

c) On considère la matrice projective R d'une isométrie affine f quelconque du plan. Montrer qu'elle est certainement de la forme :

$$R = \begin{pmatrix} a & b & \alpha \\ c & d & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ; on note } L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Que représente L ? Rappeler ses propriétés essentielles.

2.2 On considère la matrice projective R d'une isométrie affine **positive** f quelconque du plan.

a) Quelle est la forme de L dans ces conditions ?. On distinguera un cas particulier L_0.

b) Caractériser la nature de f si $L = L_0$.

c) On se place désormais sous l'hypothèse $L \neq L_0$.

c1) Quelle est la nature de f ?

c2) Proposer une méthode, utilisant les outils disponibles, pour déterminer les éléments géométriques de f.

2.3 On considère la matrice projective R d'une isométrie affine **négative** g quelconque du plan.

a) En déduire que g s'écrit $g = t_{\overrightarrow{u}} \circ s_d$, où $\overrightarrow{u}$ désigne un vecteur de V_2 et d une droite affine définie par $(a, \overrightarrow{v})$, sachant que a est un point de d et $\overrightarrow{v}$ un vecteur non nul, avec $\overrightarrow{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{v}$.

On distinguera un cas particulier g_0, qui pourtant ne sera pas discriminant pour la suite de l'étude.

b) *Etude de la nature de L*

b1) Quelle est la nature de L dans ces conditions ?

b2) Comment déterminer le vecteur $\overrightarrow{v}$ dans l'environnement disponible ?

b3) En déduire qu'il reste à déterminer un point de d et le vecteur translation $\overrightarrow{u}$ pour connaître totalement g.

c) *Détermination du miroir d puis de* $t_{\overrightarrow{u}}$

c1) Soit m un point quelconque du plan; on note $m' = g(m)$. Si on donne m par ses coordonnées, montrer comment on est capable de déterminer m'.

c2) Démontrer que, dans tous les cas possibles, le milieu du segment $[mm']$ est un point de d.

c3) En déduire une méthode de détermination du vecteur $\overrightarrow{u}$ de la translation $t_{\overrightarrow{u}}$.

2.4 *Bilan*

Intégrer les différents éléments de l'étude précédente pour définir un algorithme *etude_isometrie* $(R \rightarrow f)$ qui à partir d'une matrice projective d'isométrie affine quelconque du plan R renvoie à l'utilisateur la nature de f et ses éléments géométriques.