Exercice 1 *Etude d'un produit scalaire de $\mathbb{R}^2$*

On rappelle que pour tout triplet de réels (a,b,c) vérifiant : $a>0$ et $b^2-ac<0$, on définit un produit scalaire $\varphi_{(a,b,c)}$ sur $\mathbb{R}^2$ via la relation :

$$\langle (u_1,v_1),(u_2,v_2)\rangle = au_1u_2 + b\,(u_1v_2+v_1u_2) + cv_1v_2.$$

Un triplet (a,b,c) vérifiant les propriétés indiquées sera dit licite.

1.1 Vérifier que le triplet $(1,-1,2)$ est licite; on note φ le produit scalaire associé.

1.2 *Etude d'orthogonaux et norme relatifs à φ*

On considère le vecteur $u=(0,1)$.

a) Déterminer la norme au sens de φ du vecteur u; on la note $\|u\|$.

b) Déterminer l'orthogonal de u au sens du produit scalaire φ, c'est-à-dire l'ensemble noté $(u)^{\perp}$ des vecteurs s de $\mathbb{R}^2$ tels que: $\varphi\,[(u,s)] = \langle u,s\rangle = 0$.

c) Représenter dans une base orthonormée au sens du produit scalaire ordinaire de $\mathbb{R}^2$, le vecteur u et un vecteur de $(u)^{\perp}$.

1.2 *Géométrie dans $\left(\mathbb{R}^2,\varphi\right)$*

Proposer le plan d'une méthode permettant de déterminer des vecteurs v et w de $\mathbb{R}^2$ tels que le "triangle" $\widehat{uvw}$ soit équilatéral au sens de φ.

Exercice 2 *Outils vectoriels pour matrices projectives*

L'objet de l'exercice est de fournir une méthode de détermination des matrices des rotations vectorielles de V_3 d'une part, des matrices de symétries vectorielles planaires orthogonales d'autre part. Les résultats sont annoncés sans preuve dans le polycopié de cours; on se propose de les établir ici.

On rapporte V_3 à une base orthonormée directe $B=\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$.

2.1 *Etude des matrices de rotations vectorielles de V_3*

On considère la rotation vectorielle $r_{\overrightarrow{n},\theta}$ d'axe la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\overrightarrow{n}$ supposé unitaire et d'angle θ. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donné par la matrice colonne N de ses composantes dans la base B; on note ${}^tN = (n_1\ n_2\ n_3)$.

a) *Recherche d'une base orthonormée directe $B' = (\overrightarrow{n},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$*

a1) Fournir un algorithme *orthog* $(\overrightarrow{n})$ qui, à partir du vecteur unitaire quelconque $\overrightarrow{n}$ connu par ses composantes dans la base B renvoie un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ orthogonal à $\overrightarrow{n}$.

a2) En déduire une base orthonormée directe $B' = (\overrightarrow{n},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ de V_3.

a3) *Application numérique*

On donne, pour cette seule sous-question, $\overrightarrow{n}$ par ses composantes N dans la base B, avec ${}^tN = \left(0\ 1/\sqrt{2}\ 1/\sqrt{2}\right)$. Définir la base $B' = (\overrightarrow{n},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ issue de votre méthode.

a4) Montrer qu'à partir des questions a1) et a2), on peut déduire la matrice de passage $P = P_B^{B'}$ donnée par:

$$P = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Que représentent les colonnes de P ?

a5) P est la matrice d'une application linéaire de $\mathcal{V}_3$ qui transforme une base orthonormée directe en base orthonormée directe. En déduire qu'elle est une rotation vectorielle et que par suite: $P^{-1} = {}^t P$.

b) *Matrices de* $r_{\overrightarrow{n},\theta}$

On note R [respectivement R'] la matrice de $r_{\overrightarrow{n},\theta}$ dans la base B [respectivement B'].

b1) Montrer que $R = PR'\,({}^tP)$.

b2) Fournir R' en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

c) *Lemmes techniques*

L'objet de ces lemmes techniques est de fournir une expression de $R = PR'\,({}^tP)$ suffisamment élégante et efficace, puisque R' est d'écriture simple et connue. Les résultats intermédiaires pourront être admis pour poursuivre la résolution de l'exercice.

c1) On pose $E_{ij} = (e_{st})$ la matrice carrée d'ordre trois dont tous les éléments sont nuls hormis $e_{ij} = 1$. Montrer que si C_i désigne la colonne de numéro i ($i \in \{1, 2, 3\}$) de P on a:

$$PE_{ij}\,({}^tP) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} C_i \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t(C_j) \\ 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{pmatrix}$$

c2) Montrer que:

$$R' = (\cos\theta)I + (1 - \cos\theta)E_{11} + (\sin\theta)\,(E_{32} - E_{23})$$

c3) En déduire que $R = (\cos\theta)I + (1 - \cos\theta)A + (\sin\theta)B$

sachant que $A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} N \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tN \\ 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{pmatrix}$

et que $B = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} C_3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t(C_2) \\ 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t(C_3) \\ 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{pmatrix}.$

c4) Montrer que: ${}^tB = -B$.En déduire que B est de la forme $B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$.

c5) En utilisant le fait que $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, montrer que:

$$a = -n_3; \quad b = n_2; \quad c = -n_1.$$

c6) En déduire l'expression finale de R.

2.2 *Etude des matrices de symétries vectorielles orthogonales de* V_3

On considère la symétrie vectorielle orthogonale de miroir le plan vectoriel $\overrightarrow{P}$ orthogonal au vecteur $\overrightarrow{n}$ supposé unitaire; on la note $s_{\overrightarrow{n}}$. Ici encore, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donné par la matrice colonne N de ses composantes dans la base B; on note ${}^tN = (n_1\ n_2\ n_3)$.

On utilise les outils développés dans l'étude des rotations vectorielles; on construit encore une base orthonormée directe $B' = (\overrightarrow{n}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ d'où on déduit la matrice de passage orthogonale $P = P_B^{B'}$. On note encore S [respectivement S'] la matrice de $s_{\overrightarrow{n}}$ dans la base B [respectivement B'].

a) Montrer qu'on a encore $S = PS'\,({}^tP)$.

b) Fournir S'.

c) Montrer que sous les notations de la question 2.1c), la matrice $C = PE_{11}({}^tP)$ est définie par:

$$C = \left(\begin{pmatrix} \\ N \\ \\ \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} & {}^tN & \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right).$$

d) Déduire de ce qui précède que:

$$S = P\,(I - 2E_{11})\left({}^tP\right) = I - 2C.$$

e) En déduire l'écriture finale de S.