Exercice 1 *Etude de produits scalaires du plan vectoriel V_2 pour l'analyse d'image*

On convient pour des raisons de commodité de confondre V_2 avec $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire qu'on confond tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de V_2 de composantes $\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ dans une base donnée de V_2 avec le couple (u_1, v_1).

On rappelle que pour tout triplet de réels (a, b, c) vérifiant: $a > 0$ et $b^2 - ac < 0$ (un tel triplet sera alors dit licite), on définit un produit scalaire $\varphi_{(a,b,c)}$ sur V_2 via la relation:

$$\langle (u_1, v_1), (u_2, v_2) \rangle = au_1u_2 + b(u_1v_2 + v_1u_2) + cv_1v_2.$$

1.1 *Produit scalaire ordinaire*

Montrer que le produit scalaire euclidien ordinaire fait partie de la famille décrite ci-dessus.

1.2 *Orthogonaux de vecteurs donnés au sens de $\varphi_{(a,b,c)}$*

a) *Etude d'un cas particulier*

On donne pour cette sous-question seulement :$a = 1$; $b = 1$; $c = 4$.

- Vérifier que cette donnée définit un produit scalaire licite $\varphi_{(1,1,4)}$.
- Déterminer alors $[(0, 1)]^{\perp}$ ensemble des vecteurs de V_2 orthogonaux à $(0, 1)$, au sens du produit scalaire associé au triplet (a, b, c) choisi.

b) *Etude du cas général*

b1) On donne un vecteur non nul (u, v).

Démontrer que l'orthogonal $[(u, v)]^{\perp}$ du vecteur (u, v) au sens de $\varphi_{(a,b,c)}$, pour (a, b, c) licite, est donné par:

$$[(u, v)]^{\perp} = \{x.(-(bu + cv), au + bv) \quad / \quad x \in \mathbb{R}\}.$$

N.B: La preuve de b1) sera complète; elle comprendra la prise en compte de toutes les occurrences possibles afin de permettre l'écriture d'un algorithme valide dans un cas de vecteur (u, v) absolument quelconque.

b2) Fournir le plan de l'algorithme $vect\_ortho((a, b, c), (u, v))$ qui renvoie un couple (α, β) générateur de $[(u, v)]^{\perp}$ au sens du produit scalaire $\varphi_{(a,b,c)}$, pour (a, b, c) licite.

b3) Vérifier le résultat de la question 1.2 a).

1.3 *Utilisation en analyse d'image*

Dans le cadre d'une étude d'analyse d'image, on considère une image plane issue d'un traitement donné sur le monde réel. On se propose d'interpréter des orthogonalités dans le monde réel via un produit scalaire judicieusement choisi dans le plan de l'image obtenue. Plus précisément, on suppose que deux droites du monde réel sont orthogonales ssi deux de leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux dans le plan image au sens de $\varphi_{(a,b,c)}$ pour $(a, b, c) = (1, 1, 4)$. On dote ainsi le plan de l'image produite de deux produits scalaires simultanément: $\varphi_{(1,1,4)}$ et l'ordinaire $\varphi_{(1,0,1)}$.

a) Montrer que sous les hypothèses précédentes, toutes les droites perpendiculaires au sens de $\varphi_{(1,1,4)}$ à une "verticale" du plan image forment le même angle θ_0 avec cette verticale dans le plan image. Fournir une valeur approchée de θ_0.

.../...

b) Adapter la question précédente au cas des droites perpendiculaires aux horizontales du plan image. Conjecturer le résultat, le prouver et fournir θ_1.

c) Généraliser.

Exercice 2 *Matrices projectives d'isométries du plan: exemples élémentaires*

On rapporte le plan affine à un repère orthonormé direct $R=\left(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On note B la base de V_2 définie par: $B=\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Les matrices projectives considérées sont relatives au repère $R=\left(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, sauf indication contraire.

2.1 *Outil linéaire*

Fournir la matrice L dans la base B de la symétrie vectorielle l de miroir la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

Nb : On évitera tout calcul inutile et on déterminera géométriquement $l\left(\overrightarrow{i}\right)$ et $l\left(\overrightarrow{j}\right)$.

2.2 *Matrice projective d'une symétrie*

On donne le point $a\,(-2, 3)$ du plan affine rapporté à R.

a) Fournir la matrice projective S' dans le repère $R'=\left(a, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$de la symétrie orthogonale s de miroir la droite passant par a et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

b) En déduire la matrice projective S dans le repère $R=\left(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$de s.

2.3 *Matrice de glissement*

a) Fournir la matrice projective T dans le repère $R=\left(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ de la translation $t_{3.\left(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}\right)}$ de vecteur $3.\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$.

b) En déduire la matrice projective G de la transformation $g = t_{3.\left(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}\right)} \circ s$.

c) Montrer matriciellement que g vérifie aussi :

$$g = s \circ t_{3.\left(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}\right)}.$$

Cette propriété est-elle étonnante géométriquement ?

2.4 *Etude des puissances de g*

- Déterminer g^2 et g^3.
- Généraliser.

  N.B : On adoptera pour cette question une solution calculatoire ou géométrique, optimale de préférence !