Exercice 1 *Etude de propriétés générales des espaces vectoriels euclidiens*

Soit V un espace vectoriel euclidien, muni de son produit scalaire φ et une isométrie vectorielle f de V.

1.1 *Vecteurs propres relatifs aux valeurs propres réelles*

a) Montrer que si e [respectivement e'] est un vecteur propre de f relativement à la valeur propre $\lambda = 1$ [respectivement $\lambda' = -1$] alors e et e' sont orthogonaux.

b) *Vérification dans un cas particulier*

- Soit f une isométrie indirecte de V_2. Quelles sont ses valeurs propres et quelle est sa nature géométrique ?
- Donner une base propre orthonormée directe de f.
- Vérifier que les propriétés annoncées dans 1a) sont vraies dans ce cas particulier.

1.2 Etudier la validité de la propriété du 1.1a) pour des vecteurs propres e et e' relatifs respectivement à des valeurs propres distinctes quelconques λ et λ' de l'isométrie f de l'espace vectoriel euclidien V.

Exercice 2 *Matrices projectives d'isométries du plan*

On rapporte le plan affine P à un repère orthonormé direct $R=\left(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On note B la base de V_2 définie par: $B=\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Pour une application affine g du plan on notera systématiquement m' l'image par g d'un point affine m.

2.1 *Isométries vectorielles associées à des isométries affines du plan*

Soit g une application affine du plan d'application linéaire associée l; on rappelle qu'alors:

$$\forall (a,b) \in P^2 \quad \overrightarrow{a'b'} = l\left(\overrightarrow{ab}\right).$$

Définition

On dit qu'une application affine g du plan est une isométrie affine du plan ssi $\forall (a,b) \in P^2 \quad \left\|\overrightarrow{a'b'}\right\| = \left\|\overrightarrow{ab}\right\|$.

Montrer que l'application linéaire associée à une isométrie affine du plan est une isométrie vectorielle de V_2.

2.2 *Détermination d'une isométrie affine du plan*

a) Montrer que si on connaît l'image de seulement trois points non alignés a, b, c du plan par une isométrie affine g du plan, on connaît totalement son isométrie vectorielle associée.

Indication: on montrera qu'on connaît sa matrice dans une base bien choisie.

b) Vérifier cette propriété géométriquement en vous donnant l'image de trois points non alignés du plan par une isométrie affine du plan.

c) Pourquoi le caractère non aligné des points considérés a, b, c est-il indispensable ?

.../...

2.3 *Matrice projective dans un cas particulier*

On considère pour cette question une isométrie affine du plan qui laisse l'origine du repère o invariante; ainsi $o' = g(o) = o$. On note L la matrice de l'isométrie vectorielle l de V_2 associée. Soit $m\,(x, y)$ un point du plan rapporté au repère R et $m'(x', y')$ dans R son image par g .

a) Montrer qu'on a l'égalité matricielle:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } G = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sachant que la matrice L de l relativement à la base B= $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est donnée par: $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. G est appelée matrice projective de g; justifier ce terme.

b) En déduire que pour connaître totalement g il suffit de connaître la matrice L de son application linéaire associée l relativement à la base B= $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ de V_2.

c) *Etude d'un exemple*

Soit r la rotation affine de centre o et d'angle θ.

- Montrer que r est une isométrie affine du plan, laissant o invariant.
- Déterminer la matrice projective R de la rotation r.

2.4 *Matrice projective: vers le cas général*

- Démontrer que faire subir un changement d'origine au repère R= $\left(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ a même effet sur les coordonnées de $m\,(x, y)$ dans R que lui faire subir une translation de vecteur bien choisi. Interpréter ce résultat.
- Déterminer la matrice projective d'une translation $t_{\overrightarrow{u}}$ du plan sachant que $\overrightarrow{u}$ est de composantes $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ dans la base B= $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
- En déduire le plan de détermination de la matrice projective d'une isométrie affine du plan qui laisse un point o' invariant.

  N.B. on décrira le plan de la démarche et on identifiera les résultats intermédiaires à établir.
- Comment obtenir la matrice projective d'une isométrie g du plan qui n'admet pas de point invariant ?