MT80
Mathématiques avancées pour l'ingénieur

UTBM le 15 Janvier 2013 — *Examen Final* — *S. Abboudi,.B. Mignot*

Résumé de cours autorisé

****

I- Eléments finis

On cherche à déterminer, par éléments finis, la température le long d'une barre, de longueur L, soumise à une densité de flux de chaleur q_0 en $x=0$ et à une température T_L en $x=L$. Le système d'équations qui régit le transfert de chaleur dans la barre s'écrit donc :

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)+P(x)=0 \qquad 0<x<L \qquad (S)$$

avec $\quad -k\dfrac{dT}{dx}(L)=q_0 \qquad$ *en* $x=0$

et $\quad T(L)=T_L \qquad$ *en* $x=L$

k représente la conductivité thermique de la barre et $P(x)$ un terme représentant une source de chaleur.

Le domaine $[0, L]$ est composé de trois éléments finis de longueurs respectives L_1, L_2 et L_3 sur lesquels on applique une approximation nodale linéaire et le principe de pondération de Galerkin.

a) Ecrire les formulations intégrales globale et faible du système (S)
b) Déterminer les systèmes élémentaires des trois éléments finis et par suite le système global.
c) Calculer ensuite les variables nodales sur le domaine $[0,L]$ en utilisant les données suivantes : $L=3$, $L_1=L_2=L_3=1$, $k=1$, $P(x)=P_0=20$, $T_L=10$, $q_0=100$.
d) Comparer le résultat obtenu avec la solution exacte aux nœuds de chaque élément.
e) Calculer à nouveau les variables nodales si $P(x)=\dfrac{P_0}{L}(1-x)$
f) On se place dans les conditions de la question c) $k=1$, $P(x)=P_0=20$, $T_L=10$, $q_0=100$ et on utilise uniquement deux éléments, de longueur respective, $L_1=2$, $L_2=1$, avec une approximation quadratique sur le premier et linéaire sur le second. Déterminer à nouveau les températures inconnues aux noeuds de la barre

II- Résidus pondérés

Utiliser le principe de la méthode de Galerkin pour résoudre le système (S) de l'exercice I.

1- La solution approchée sera recherchée sous la forme d'un développement sur la base polynomiale : $T(x)=\sum_{k=0}^{3}a_k\Phi_k(x)$, $\Phi_k(x)=(x-L)^k$

AN : $k=1$, $L=3$, $P(x)=P_0=20$, $T_L=10$, $q_0=100$

2- Reprendre la question 1 en utilisant la base $\Phi_k(x)=x^k$ et comparer les deux solutions aux points $x=0$, *1 et 2*.