Examen final Algèbre (1 heure)

Rédiger sur une copie séparée

Exercice 1 :

On considère la matrice , d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique , définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

1°) Calculer le déterminant de A . Est-ce que 0 est une valeur propre de f ?
2°) Déterminer le polynôme caractéristique de A , préciser le spectre de A et en déduire que A est diagonalisable . Préciser la matrice diagonale D semblable à A .
3°) Déterminer une base de chacun des espaces propres de A .
4°) On admet que la matrice de passage de la base canonique à celle d'une famille de vecteurs propres est par exemple :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer l'inverse de P .

Exercice 2 :

On considère la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

1°) Déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres . Donner la matrice D semblable à A (ordre croissant des valeurs propres) .

2°) Vérifier que l'on peut choisir $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer alors P^{-1} .

3°) On considère la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $U_{n+1} = AU_n$, avec $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Calculer U_1 , U_2 , U_3

b) Un résultat sur les suites géométriques nous donne que $U_n = A^n U_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
En utilisant le fait que $A^n = PD^nP^{-1}$, déterminer les expressions de u_n et de v_n en fonction de n .

Examen final Analyse (partie A : ½ heure, partie B : ½ heure)

Partie A - *Rédiger sur une copie séparée*

1) Rotationnel / divergence / gradient

Le champ des vitesses d'un solide tournant autour d'un axe fixe est défini par :

$$\overrightarrow{V(M)} = (bz - cy)\vec{i} + (cx - az)\vec{j} + (ay - bx)\vec{k}$$

1.1) Déterminez rot($\vec{V}$(M) , quelle est l'unité de la norme de ce vecteur ?

Soit un champ vectoriel $\overrightarrow{B(M)} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$.

1.2) Déterminez la divergence de ce champ, on la notera U(M) qui est un champ scalaire.

1.3) Quelle est la nature des surfaces pour lesquelles U(M) est constante ; cas particulier pour U(M) = 3 ?

1.4) Déterminez le gradient du potentiel U(M) ; lien avec $\overrightarrow{OM}$?

2) Domaine de définition d'une fonction à 2 variables

Déterminez les domaines de $\mathbf{R}^2$ pour lesquels les fonctions à deux variables *f(x,y)* et *g(x,y)* suivantes ont un sens.

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x+y}}$$

$$g(x,y) = Ln(x^2 + y^2 - 4)$$

Astuce possible mais non obligatoire pour g(x,y) : $r = x^2 + y^2 = OM^2$

Pour plus de visibilité **on hachurera la zone du plan (Ox,Oy) correspondant aux domaines de définition concernés.**

3) Point critique

$$\text{Soit } z = x^2 + y^2 + xy + 2$$

La surface ainsi définie dans l'espace à 3 dimensions contient le point de coordonnées (0,0,2).
Montrez que c'est un point critique et en déterminez sa nature.

4) Limites

Déterminez les limites des fonctions à deux variables *h(x,y)* et *k(x,y)* suivantes lorsque **x et y tendent vers 0.**

$$h(x,y) = \frac{e^x}{x^2 + y^2}$$

$$k(x,y) = \frac{xy}{x - y}$$

Astuce possible mais non obligatoire : en représentation polaire (r,θ) on peut écrire $y = x.\tan\theta$ pour $\theta \neq \pm\frac{\pi}{2}$, sinon x = 0 et y réel quelconque non nul.

Partie B - *Rédiger sur une copie séparée*

Soit l'intégrale I définie par :

$$I = \iint_D e^{\frac{1}{2}(x+y)} dx\, dy \quad avec\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |x| + |y| \leq 2\}$$

a) Dessiner le domaine D.
b) Calculer l'intégrale I.