MT81 - Examen Final

Mercredi 12 janvier 2022

Documents non autorisés – Calculatrice tolérée. 120 minutes.
La clarté des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront dans la note finale de l'examen.

Partie 1 : Analyse

<u>Exercice 1</u> : Les trois exercices sont indépendants

1/ On considère la fonction : $g(x) = \frac{3}{(x-3)(x-2)}$.

Déterminer son domaine de définition et calculer une primitive sur chacun des intervalles où elle est définie.

<u>Astuce</u> : Déterminer les réels a et b tels que $\frac{3}{(x-3)(x-2)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3}$.

2/ Déterminer la valeur de l'intégrale $\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

<u>Astuce</u> : On pourra utiliser le changement de variable $u = \sqrt{x}$.

3/ Résoudre, sur un intervalle que l'on précisera, l'équation différentielle suivante :

$$3y' - 2y = -20\cos(2x) \quad \text{avec } y(0) = 0$$

<u>Astuce</u> : Déterminer une solution particulière sous la forme : $y_p(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ où A, B et ω sont des réels à déterminer.

<u>Exercice 2</u> :

Soit la fonction $f(x\,;y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

1/ Calculer $f(2\,;1)$.

2/ Calculer :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,;y)\,, \frac{\partial f}{\partial y}(x\,;y)\,, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,;y)\,, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,;y)\,, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x\,;y)$$

3/ Calculer le gradient de f au point de coordonnées $(1\,;2)$.

4/ Rechercher les points critiques de f.

5/ Déterminer les éventuels extrema locaux et/ou les points selles de la fonction.

<u>Astuce</u> : Soit f une fonction de classe C^2 de deux variables x et y, et $(x_0\,;\,y_0)$ un point critique de cette fonction.

Notons :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0\,;\,y_0) \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0\,;\,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0\,;\,y_0) \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0\,;\,y_0)$$

- Si $\boldsymbol{s^2 - rt > 0}$, alors le point $(x_0\,;\,y_0)$ n'est ni un maximum, ni un minimum. On dit que c'est un **point selle**.
- Si $\boldsymbol{s^2 - rt < 0}$ et $\boldsymbol{r < 0}$, alors le point $(x_0\,;\,y_0)$ est un **maximum local**.
- Si $\boldsymbol{s^2 - rt < 0}$ et $\boldsymbol{r > 0}$, alors le point $(x_0\,;\,y_0)$ est un **minimum local**.
- Si $\boldsymbol{s^2 - rt = 0}$, alors **on ne peut pas conclure**. On dit que $(x_0\,;\,y_0)$ est un point critique dégénéré.

Partie 2 : Algèbre

<u>Exercice 3</u> : Les trois exercices sont indépendants

1/ On considère les vecteurs $x = (1,2,1)$, $y = (0,1,1)$ et $z = (1,3,k)$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $k \in \mathbb{R}$ tel que $z \in Vect(x, y)$.

2/ Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) où $e_1 = (1,1,0)$, $e_2 = (1,2,1)$, $e_3 = (2,3,2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées du vecteur $u = (0,1,-2)$ dans cette base.

3/ Déterminer une base du noyau et une base de l'image de l'application linéaire suivante :

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 , f(x, y, z) = (2x + 3y , z - 2y)$$

<u>Exercice 4</u> :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1/ Vérifier que les valeurs propres de A sont : $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 3$.

2/ Montrer que A est diagonalisable.

3/ Déterminer les vecteurs propres de A et la matrice de passage P.

4/ Déterminer D la matrice diagonale de A.

5/ On a $D = P^{-1}AP$, pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer A^k en fonction de D^k.

<u>Question Bonus</u> : Calculer A^k.