MT82

Mathématiques avancées pour l'ingénieur

UTBM le 17 Janvier 2014 *Examen Final* *S. Abboudi,. B. Mignot*

Résumé de cours autorisé

****

I- Eléments finis 1D

On considère le système suivant :

EDO $\frac{d}{dx}(k\frac{du}{dx}) + a\,u(x) + P(x) = 0 \qquad 0 < x < L\,, \qquad (1)$

CL $u(0) = U_0$ en $x=0$ *et* $-k\frac{du}{dx}(L) = U'_L$ en $x=L \qquad (2)$

Les données du système sont : $U'_L = 100$, $k = 1$, $U_0 = 10$, $L = 4$ et $P(x) = L - x$

A) Etude du cas *a=0*

1) Ecrire les formes variationnelles globale et faible du système.

2) Détailler le calcul des matrices élémentaires de deux éléments finis des longueurs respectives $L_1=L/4$ et $L_2=3L/4$, en utilisant une approximation nodale linéaire et une pondération du résidu de type Galerkin sur chaque élément.

3) Assembler les deux éléments et calculer la solution aux ***nœuds*** et aux ***milieux*** des éléments.

4) Calculer la solution exacte et comparer avec les résultats obtenus en 3).

B) Etude du cas *a = - 1*

Reprendre les questions 1), 2) et 3) en indiquant uniquement ce qui change.

II – Méthode de collocation par points

Utiliser la méthode de collocation par points, basée sur une approximation polynômiale de la solution et une pondération du résidu de type Galerkin, pour résoudre le système ci-dessus (1) et (2) avec ***a=-1***, en supposant que la fonction $P(x)$ est connue uniquement aux points $X_1=L/3$ avec $P(X_1)=8/3$ et $X_2=2L/3$ avec $P(X_2)=4/3$.

III- Optimisation

1) Utiliser 2 itérations de la méthode du point fixe pour minimiser la fonction :

$$f(x) = x^4 + x^2 - x - 1, \qquad 0 \le x \le 2, \quad \text{initialiser à } x_0 = 0{,}5$$

2) Discuter en fonction du réel a, les points critiques de la fonction :

$$f(x,y) = 3x^3 - axy + y^3$$

3) Parmi tous les rectangles, de côtés a et b, que l'on peut insérer dans l'ellipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, déterminer celui dont la surface est maximale. Justifier votre réponse.