MT82

Mathématiques avancées pour l'ingénieur

UTBM le 14 Janvier 2015 | *Examen Final* | *S. Abboudi, B. Mignot*

Résumé de cours autorisé

****

I- Eléments finis 1D

On considère le système suivant :

EDO $\frac{d}{dx}(k(x)\frac{du}{dx})+P(x)=0$ $\quad 0<x<L$, *(1)*

CL $-k(0)\frac{du}{dx}(0)=U'_0$ en $x=0$, $\quad u(L)=U_L$ en $x=L$ *(2)*

Les données du système sont : $U_0^{'}=100$, $U_L=10$, $L=3$,
$k(x)$ et $P(x)$ sont des fonctions connues.

A) Etude du cas $k(x)=k_0$, $P(x)=P_0$

1) Ecrire les formes variationnelles globale et faible du système.
2) Détailler le calcul des matrices élémentaires de deux éléments finis des longueurs respectives $L_1=L/3$ et $L_2=2L/3$, en utilisant une approximation nodale linéaire et une pondération du résidu de type Galerkin sur chaque élément.
3) Calculer, après assemblage, la solution aux *nœuds* et aux *milieux* des deux éléments.
4) Calculer la solution exacte et comparer avec les résultats obtenus en 3).
AN : $k_0=50$, $P_0=100$.

B) Etude du cas $k(x)=\alpha x+\beta=(k_1-k_0)(x/L)+k_0$, $P(x)=ax+b=(P_1-P_0)(x/L)+P_0$
Reprendre les questions 1), 2) et 3).
AN : $k_0=50$, $k_1=mk_0$, $P_0=100$, $P_1=mP_0$, $m=1{,}2$.

II – Méthode de Galerkin

Utiliser la méthode de Galerkin, basée sur une approximation polynômiale (limitée à 4 termes) de la solution et une pondération du résidu de type Galerkin, pour résoudre le système ci-dessus (1) et (2) en supposant $k(x)=k_0$, $P(x)=P_0$.

III- Optimisation

1) Déterminer deux nombres dont leur somme vaut 15 tels que :
   a) la somme de leur carré est minimale,
   b) le produit de l'un par le cube de l'autre est maximal.

2) Utiliser 2 itérations de la méthode du point fixe pour minimiser la fonction :

$$f(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x-1$$

Déterminer un domaine D de minimisation et initialiser avec une valeur x_0 dans ce domaine.