le 24 Janvier 2006

UTBM

MT11

Final Automne 2005

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Chaque exercice doit être rédigé sur une feuille différente

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 *(Applications directes du cours) - 4 points*

Dans cet exercice, aucune question ne nécessite plus de quelques lignes pour être résolue

1) Retrouver, **grâce à la définition de la dérivée**, *la dérivée de* $\sqrt{x}$.

2) **Grâce à la formule des accroissements finis**, *montrer que*

$$\forall x \in [0, +\infty[, \sin(x) \leq x.$$

3) Soient deux suites réelles $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *avec* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. *Que peut-on dire de la convergence de* $(u_n.v_n)_n$ *? Donner un exemple pour chaque situation possible.*

4) Déterminer a *et* b *dans* $\mathbb{R}$ *tels que* $X^2 + 2$ *divise* $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$.

Exercice 2 *(***NOUVELLE FEUILLE***) - 4 points*

Après avoir rappeler une des méthodes qui permet d'obtenir le développement limité de $\ln(1+t)$ *en* 0, *déterminer les limites suivantes :*

2) $L_1 = \lim_{x\to 0}(\frac{\sin(x)}{x})^{\frac{1}{x^2}}$,

3) $L_2 = \lim_{x\to+\infty}(x - x^2. \ln(1 + \frac{1}{x}))$.

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 *(***NOUVELLE FEUILLE***) - 6 points*

Soit la fraction rationnelle

$$F(x) = \frac{2X^3 + 2X^2 + 4X + 3}{X^4 + 3X^2 + 2}$$

que l'on cherche à intégrer.

i) Factoriser $P(X) = X^4 + 3X^2 + 2$ *dans* $\mathbb{R}[X]$ *en polynômes irréductibles.*

ii) Décomposer en éléments simples $F(X)$ *dans* $\mathbb{R}(X)$.

iii) Donner toutes les primitives de $F(X)$ *sur son ensemble de définition.*

Exercice 4 *(***NOUVELLE FEUILLE***) - 6 points*

En cas de problème, on admettra le résultat pour passer à la question suivante

Soit la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: &]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{\arctan(x)}{(\sin(x))^3} - \frac{1}{x^2} \end{array}$$

1) Montrer que f *peut se prolonger par continuité en* 0 *en posant* $f(0) = \frac{1}{6}$. *Justifier.*

2) Montrer que le développement limité de $(\sin(x))^3$ *en* 0 *à l'ordre* 8 *est*

$$(\sin(x))^3 = x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{13}{120}x^7 + x^8\epsilon_1(x))$$

avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = 0$.

3) En déduire le développement limité en 0 *à l'ordre* 5 *de* $\frac{x^3}{(\sin(x))^3}$ *et montrer que*

$$\frac{1}{(\sin(x))^3} = \frac{1}{x^3}.(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{17}{120}x^4 + x^5\epsilon_2(x))$$

avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0$.

QUESTIONS SUPPLEMENTAIRES *(4 points)*

4) En déduire que le développement limité en 0 *à l'ordre* 2 *de* f *est*

$$\frac{\arctan(x)}{(\sin(x))^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{6} + \frac{7}{40}x^2 + x^2\epsilon_3(x))$$

avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_3(x) = 0$.

5) En déduire la position de la courbe de f *par rapport à sa tangente en* 0.

RAPPELS :

- le développement limité en 0 *à l'ordre* 5 *de* $\arctan(x)$ *est* $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + x^5\epsilon_1(x)$ *avec* $\lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = 0$.

- le développement limité en 0 *à l'ordre* 8 *de* $\sin(x)$ *est* $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + x^7\epsilon_2(x)$ *avec* $\lim_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0$.