

## Final Automne 2006

*Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main*

## Chaque exercice doit être rédigé sur une feuille différente

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

**Exercice 1** (*Applications directes du cours*) - 5 points

Dans cet exercice, aucune question ne nécessite plus de quelques lignes pour être résolue

1) Peut-on trouver  $f$  une fonction continue sur  $]a, b[$  telle que  $f(]a, b[) = [c, d]$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) ? Si oui, donner un exemple, sinon, justifier.

2) Donner l'ensemble de définition et la dérivée de la fonction réelle à une variable réelle définie par  $f(x) = \arccos(e^{x+1})$ .

3) Peut-on trouver une fonction réelle définie sur  $\mathbb{R}$ , dérivable sur  $\mathbb{R}$ , dont la dérivée ne soit pas dérivable sur  $\mathbb{R}$  ? Si oui, donner un exemple, sinon, justifier.

4) Peut-on trouver un polynôme de degré 3 tel que  $D(X) = X^2 - 1$  soit PGCD de  $P(X)$  et  $P'(X)$  ? Si oui, donner un exemple, sinon, justifier.

5) Quelle est le nombre de solutions réelles de l'équation  $x^3 + 2x - 1 = 0$  ?

**Exercice 2** (5 points)

Soit  $n$  un entier strictement positif. On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\begin{cases} f_n(0) &= 0 \\ f_n(x) &= \arctan\left(\frac{1}{x \cdot \sin(\frac{1}{n})}\right) \text{ pour } x \neq 0 \end{cases}$$

1) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé, la fonction  $f_n$  est-elle continue ?

2) Pour  $x \in \mathbb{R}$  fixé, calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

3) On note  $f$  l'application définie sur  $\mathbb{R}$  qui à  $x$  associe  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ . Est-elle continue sur  $\mathbb{R}$  ? La représenter.

TOURNER LA PAGE SVP

**Exercice 3** (6 points)

1) Décomposer en éléments simples

$$\frac{2}{x(x+1)(x+2)}.$$

2) En déduire la somme  $S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p(p+1)(p+2)}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

3) Trouver  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

4) **Généralisation de 1)** : Décomposer en éléments simples

$$\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad n \geq 3.$$

5) **Question indépendante** : Décomposer en éléments simples sur  $\mathbb{R}(X)$ , la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X^2 - X + 1}{X^4 + X^2}.$$

Quelles sont les primitives de  $F(X)$  ?

**Exercice 4** (5 points)

On considère la fonction réelle d'une variable réelle :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1 - x} \end{aligned}$$

1) Quel est l'ensemble de définition de  $f$  ? La prolonger par continuité.

2) Montrer que le prolongement de  $f$  est dérivable en 0. Donner la valeur de cette dérivée.

3) Donner son développement limité en 0 à l'ordre 3.