Corrigé

Exercice 1 Suite récurrente (7 points)

1. $u_0 \in [a,b]$ donc $a \leqslant u_0 \leqslant b$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = f(u_{n-1}) \in [a,b]$ (car $f([a,b]) \subset [a,b]$). Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a \leqslant u_n \leqslant b$; la suite est bornée.

2. La fonction f est croissante et $u_0 < f(u_0)$. Montrons par récurrence que (u_n) est croissante.

Au rang $n = 0$ on a $u_0 < f(u_0) = u_1$ la croissance de la suite est vraie au rang 0.

Au rang n on suppose $u_n \leqslant u_{n+1}$ on a alors $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$ (car f est croissante) c'est à dire $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$. La croissance de la suite est vérifiée au rang $n+1$. Par récurrence la suite est croissante. Or on a vu que (u_n) est bornée (donc majorée). La suite (u_n) est croissante majorée, elle converge. Notons α la limite de (u_n). La fonction f étant continue on a $\alpha = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\alpha)$.

3. Si $u_0 > f(u_0)$ alors on montre par récurrence que la suite est décroissante :

Au rang 0 on a $u_0 > f(u_0) = u_1$.

Au rang n on suppose $u_n \geqslant u_{n+1}$, on a alors $f(u_n) \geqslant f(u_{n+1})$ (car f est croissante) c'est à dire $u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$. La suite est décroissante au rang $n+1$. La suite étant minorée on en déduit qu'elle converge.

4. Pour la suite

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{3+u} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

On note $f : [0,3] \to [0,3]$ (l'intervalle $[0,3]$ n'est pas le seul choix possible) définie par $f(x) = \sqrt{3+x}$. Par croissance la fonction $\sqrt{}$ on sait que f est croissante. De plus $u_1 = f(u_0) = f(1) = \sqrt{4} = 2 > u_0$, la suite (u_n) est croissante ; d'après la question **2** elle est convergente et sa limite est un réel α tel que $\alpha = \sqrt{3+\alpha}$. Donc α vérifie $\alpha^2 = 3+\alpha$. Les racines de $\alpha^2 - \alpha - 3 = 0$ sont $\alpha_1 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ et $\alpha_2 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$. Or $\alpha_1 < 1 = u_0$ et la suite (u_n) étant croissante on en déduit que $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

5. Si f est décroissante on a $\forall x, y \in [a,b]$ tels que $x \leqslant y$:

$$x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y) \Rightarrow f(f(x)) \leqslant f(f(y))$$

Ce qui montre que $f \circ f$ est croissante. Or $u_n = f(u_{n-1}) = f(f(u_{n-2}))$, on en déduit que les suites

$$\begin{cases} u_{2n} = f \circ f(u_{2(n-1)}) \\ u_0 \in [a,b] \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{2n+1} = f \circ f(u_{2n-1}) \\ u_1 \in [a,b] \end{cases}$$

sont convergentes car bornées et définies par $f \circ f$ qui est croissante (le sens de variation dépend du signe de $u_0 - u_2$ pour (u_{2n}) et $u_1 - u_3$ pour (u_{2n+1})).

Exercice 2 D.L. et fonction réciproque (7 points)

1. $f'(x) = 2x\arctan(x) + 1$. Sur $[0,+\infty[$ on a $x \geqslant 0$ et $\arctan(x) \geqslant 0$ donc $2x\arctan(x) \geqslant 0$ c'est à dire $f'(x) \geqslant 1$ sur $[0,+\infty[$; sur $]-\infty,0]$ on a $x \leqslant 0$ et $\arctan(x) \leqslant 0$ donc $2x\arctan(x) \geqslant 0$ c'est à dire $f'(x) \geqslant 1$ sur $]-\infty;0]$. On en déduit f est strictement croissante, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$ (on montre à la question suivante que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$).

2. f est strictement croissante et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. Le D.L à l'ordre 3 en 0 de arctan est $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to0}\epsilon(x) = 0$. On en déduit $f(x) = (x^2+1)(x - \frac{x^3}{3}) + x^3\epsilon_1(x) = x + \frac{2}{3}x^3 + x^3\epsilon_2(x)$. Le point 0 est bien un point d'inflexion.

4. **a.** On a $f(0) = 0$ donc $g(0) = g(f(0)) = f^{-1}(f(0)) = 0$.

b. D'après le calcul de f' fait à la question **1** on sait que $f'(x) \geqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La dérivée ne s'annulant jamais sur $\mathbb{R}$, la fonction réciproque est dérivable sur son ensemble de définition. On a ainsi $g'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = 1$. Le coefficient directeur de la tangente est donc 1. De plus la tangente passe par le point de coordonnée $(0,0)$ donc l'équation de la tangente est $y = x$.

c. Grace au D.L. de f en 0 on sait que 0 est un point d'inflexion pour f ; Les courbes représentatives de f et g ont de plus la même tangente en $(0,0)$ (la droite d'équation $y = x$). On en déduit par symétrie des courbes représentatives que 0 est un point d'inflexion pour g (donc $g''(0) = 0$) dont le changement de concavité est opposé au changement de concavité de f au voisinage de 0. Ainsi puisque $f'''(0) > 0$ on ne peut pas avoir $g'''(0) > 0$. Donc $g'''(0) \leqslant 0$.

5. **a.** $a_0 = g(0) = 0$.

b. $g(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^3\epsilon_1(x)$
$f(x) = x + \frac{2}{3}x^3 + x^3\epsilon_2(x)$,
donc

$$f \circ g(x) = (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) + \frac{2}{3}(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)^3 + x_3\epsilon_3(x)$$

$$= a_1x + a_2x^2 + (a_3 + \frac{2}{3}a_1^3)x^3 + x^3\epsilon_4(x)$$

c. De l'égalité $f \circ g(x) = x$ on obtient

$$a_1x + a_2x^2 + (a_3 + \frac{2}{3}a_1^3)x^3 + x^3\epsilon_4(x) = x$$

Ce qui donne en identifiant $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ et $a_3 = -\frac{2}{3}a_1^3 = -\frac{2}{3}$.

Exercice 3 Théorème de Darboux (9 points)

1. **a.** f est continue sur $\mathbb{R}^*$, vérifions qu'elle est continue en 0 : $-1 \leqslant \sin(\frac{1}{x}) \leqslant 1 \Rightarrow -x^2 \leqslant f(x) \leqslant x^2$ donc le théorème des gendarmes montre que $\lim_{x\to0} f(x) = f(0) = 0$. La fonction est bien continue. Pour tout x non nul f est dérivable et on a $f'(x) = 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$. Vérifions que f est dérivable en 0. Pour cela on calcule,

$$\lim_{x\to0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to0} x\sin(\frac{1}{x}) = 0$$

(par le théorème des gendarmes). On a donc montré que $f'(0) = 0$. La fonction est bien dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. La fonction $x \to 2x\sin(\frac{1}{x})$ tend vers 0 quand $x \to 0$, mais la fonction $x \to \cos(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. On en déduit que h n'a pas de limite en 0.

2. **a.** g est dérivable comme somme de fonctions dérivables, $g'(x) = f'(x) - y$.

b. g est continue (car dérivable) or une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ atteint ses bornes. Donc il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $g(c)$ soit le minimum de g sur $[a, b]$.

c. $g'(a) = f'(a) - y < 0$ car $y > f'(a)$ par hypothèse. De même $g'(b) = f'(b) - y > 0$ car $y < f'(b)$.

d. Par l'absurde on suppose que le minimum de g est atteint en a. Alors pour tout $x \in [a, b]$ on a $g(x) - g(a) \geqslant 0$. Ainsi $\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \geqslant 0$. En prenant la limite $x \to a$ on en déduit que $g'(a) \geqslant 0$ ce qui contredit la question **2.c**. De même supposons par l'absurde que le minimum de g sur $[a, b]$ soit atteint en b, alors pour tout $x \in [a, b]$ on a $g(x) \leqslant g(b)$ donc $\frac{g(x)-g(b)}{x-b} \leqslant 0$. En passant à la limite quand $x \to b$ on obtient $g'(b) \leqslant 0$. Ce qui contredit la question **2.c**. On a donc montré que g n'atteint pas son minimum en a ou b.

e. Il existe donc $c \in]a, b[$ où le minimum est atteint. Le minimum étant un point critique (un point où la dérivée s'annule) on doit avoir $g'(c) = 0$ c'est à dire $f'(c) - y = 0$. Il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = y$. La fonction f' vérifie donc le théorème des valeurs intermédiaires sur $[a, b]$.

f. On suppose $f'(a) > f'(b)$ et y un réel quelconque tel que $f'(a) > y > f'(b)$. On considère à nouveau la fonction g définie par $g(x) = f(x) - xy$, on montre alors que $g'(a) > 0$ et $g'(b) < 0$. On sait qu'il existe un $c \in [a, b]$ tel que $g(c)$ soit le maximum de g sur $[a, b]$ (car g est continue) on montre comme à la question **2.d** que ce maximum n'est atteint ni en a ni en b. Donc $c \in]a, b[$ et on en déduit que $f'(c) = y$ (car $g'(c) = 0$). Ce qui prouve que f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires sur $[a, b]$.

3. On remarque ici que $h = f'$ donc d'après le théorème de Darboux démontré à la question **2**, on sait que h vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.