FINAL

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'attribution de la note. Le barème est donné à titre indicatif. Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée pour l'épreuve. Les calculatrices sont interdites.

UTILISER UNE COPIE PAR EXERCICE

Exercice 1 suite récurrente ($5+2$ points)

On considère $f : [a,b] \to [a,b]$ une application réelle continue. Soit (u_n) la suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in [a,b] \end{cases}$$

1. Montrer que (u_n) est bornée.

2. On suppose que f est croissante. Montrer par récurrence que si $u_0 < f(u_0)$ alors (u_n) est croissante. En déduire que la suite converge vers un réel α solution de $f(x) = x$.

3. Que se passe-t-il si f est croissante et $u_0 > f(u_0)$?

4. Application : montrer que la suite définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{3+u_n} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

est convergente et déterminer sa limite.

5. **[points bonus]** Si f est décroissante montrer que $f \circ f$ est croissante. En déduire alors que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent.

Exercice 2 D.L. et fonction réciproque (7 points)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (x^2+1)\arctan(x)$.

1. Montrer que f est bijective.

2. Donner le tableau de variation de f en précisant les limites en $\pm\infty$.

3. Calculer un D.L. de f en 0 à l'ordre 3. En déduire la nature du point 0.

4. Soit $g = f^{-1}$

- **a.** Que vaut $g(0)$?
- **b.** Pourquoi g est-elle dérivable ? Calculer $g'(0)$. En déduire l'équation de la tangente en 0 à la courbe $\mathcal{C}_g$ représentative de g.
- **c.** On admet que g'' et g''' existent. Démontrer sans calculs que $g''(0) = 0$ et $g'''(0) \leqslant 0$. [indication : on pourra esquisser les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ au voisinage de 0].

5. On propose de déterminer par le calcul le D.L. de $g = f^{-1}$ en 0 à l'ordre 3, on note ce D.L. $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^3\epsilon(x)$.

- **a.** Montrer que $a_0 = 0$.
- **b.** Calculer le D.L. en 0 à l'ordre 3 de $f \circ g$ en fonction des coefficients a_1, a_2, a_3.
- **c.** Utiliser alors l'égalité $f(g(x)) = x$ pour identifier les coefficients a_1, a_2 a_3.

Exercice 3 Théorème de Darboux (9 points)

À la question **2** de cet exercice on vous fait démontrer le théorème de Darboux : **si f est une fonction dérivable sur I alors la fonction f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires sur I.** Ce résultat pourra être admis à la question **3**.

1. Soit

$$f : \left| \begin{array}{ccc} [-1;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

a. Montrer que f est continue et dérivable sur $[-1;1]$. Calculer $f'(0)$.

b. Montrer que

$$h : \left| \begin{array}{ccc} [-1;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

n'est pas continue.

2. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On considère $a < b$, deux éléments de I, tels que $f'(a) < f'(b)$ et soit y un réel tel que $f'(a) < y < f'(b)$.

a. Montrer que la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - xy$ est dérivable. Calculer g'.

b. Quel théorème du cours permet d'affirmer que la fonction g admet un minimum sur $[a, b]$?

c. Montrer que $g'(a) < 0$ et $g'(b) > 0$.

d. Démontrer que le minimum de g n'est pas atteint en a. [indication : on pourra raisonner par l'absurde puis calculer $\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$]. De même démontrer que le minimum de g n'est pas atteint en b.

e. Déduire de ce qui précède qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = y$. Que signifie ce dernier résultat pour f' ?

f. Dans la démonstration précédente on suppose $f'(a) < f'(b)$. Sans refaire les calculs expliquer, en donnant les étapes, comment démontrer que f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires sur $[a, b]$ si $f'(a) > f'(b)$.

3. Montrer que la fonction h de la question **1** vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.