# EXAMEN FINAL

*La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'attribution de la note. Le barème est donné à titre indicatif.*

## Exercice 1

**Question de cours**

**1.** *Soit* $f : I \to J$ *une fonction bijective telle que* $f'(x) \neq 0$. *Démontrer que*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

*En déduire la fonction dérivée de Arccos.*

**2.** *Calculer à l'aide d'un développement limité,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{2arctan(x) - \sin(2x)}{(ln(1+x))^3}$$

**4 points**

## Exercice 2

**1.** *Associer aux courbes suivantes les représentations graphiques correspondantes données ci-dessous au voisinage de* $0$ *:*

**a.** $y = 2 + 2\sin(x) + x^2 - 2e^x$. **b.** $y = \cos(x) + ch(x) - 2$ **c.** $y = x^2 + 2\ln(x+1) - 2x$

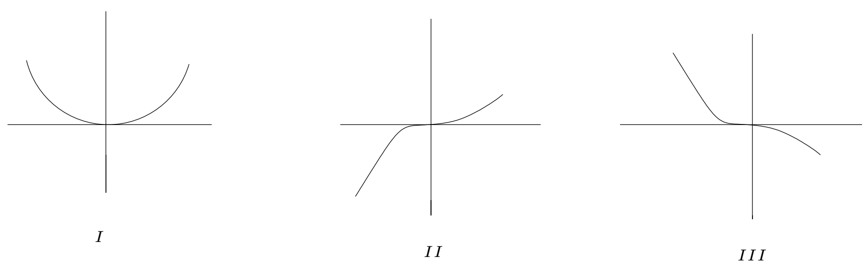

Fig. 1 –

**2.** *Soit* $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \frac{x^2}{e^x - e^{-x}} \end{array} \right.$

**a.** *Calculer le développement limité de* $f$ *à l'ordre* $3$ *en* $0$. *En déduire que* $f$ *est prolongeable par continuité sur* $\mathbb{R}$.

**b.** *Montrer que* $f$, *prolongée en* $0$, *est dérivable et calculer* $f'(0)$.

**c.** *Le point* $0$ *est-il un point d'inflexion ?*

**6 points**

♣ TOURNEZ LA PAGE ♠

**Exercice 3**

**Méthode des sécantes** *Le but de ce problème est de donner une méthode pour trouver une solution approchée de $f(x) = 0$ où $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction deux fois dérivable. On suppose dans tout l'exercice que :*

$$H1 : f(a)f(b) < 0$$
$$H2 : f \text{ est continue}$$
$$H3 : f'(x) > 0 \text{ et } f''(x) > 0 \text{ pour tout } x \in ]a, b[.$$

**1.** *Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution $\xi \in ]a, b[$.*

**2.** *On représente la situation sur la figure 2. Le but des questions suivantes est de construire une suite de réels convergents vers $\xi$.*

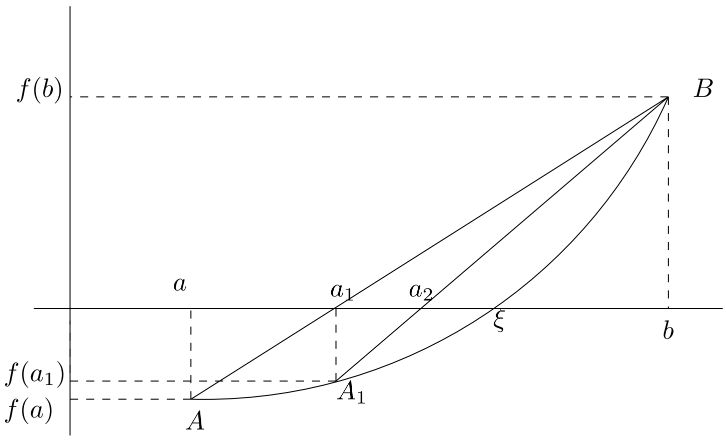


Fig. 2 – Illustration de la méthode

**a.** *On rappelle que le coefficient directeur $m$ d'une droite passant par $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ est $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On note $(a_1, 0)$ les coordonnées du point d'intersection de $(AB)$ et l'axe des abscisses. Donner l'équation cartésienne de la droite $(AB)$ et en déduire que $a_1 = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$.*

**b.** *Montrer que $a \leqslant a_1$ et que $f(a_1) \leqslant 0$ (vous pouvez avoir besoin de l'hypothèse $H3$), en déduire que $a \leqslant a_1 \leqslant \xi$.*

**c.** *On considère la suite $(a_n)$ définie par*

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_n = a_{n-1} - f(a_{n-1})\frac{b-a_{n-1}}{f(b)-f(a_{n-1})} \end{cases}$$

*Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant \xi$. En déduire que la suite $(a_n)$ est convergente.*

**d.** *Montrer que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \xi$*

**3.** *Illustrer par un dessin similaire à la figure 2 la situation où $f'(x) > 0$ et $f''(x) < 0$ pour tout $x \in ]a, b[$. Comment construire une suite qui converge vers la solution $\xi$ ? (on ne demande pas de démonstration, des dessins clairs ou une expression pour la suite peuvent suffire)*

**10 points**