FINAL

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'attribution de la note. Le barème est donné à titre indicatif. Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée pour l'épreuve. Les calculatrices sont interdites.

UTILISER UNE COPIE PAR EXERCICE

Exercice 1 Questions de cours (6 points)

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $e^{\tan(x)}$.

2. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^{\tan(x)} - 1}{x}$ est prolongeable par continuité en 0.

3. À propos du théorème de Rolle[1]

a. Proposer un dessin illustrant l'énoncé du théorème de Rolle.

b. Montrer à l'aide de dessins clairs que le théorème est faux si on est dans les hypothèses suivantes :

i. $f(a) \neq f(b)$.

ii. f n'est pas dérivable sur $]a, b[$ mais continue sur $[a, b]$.

iii. f n'est pas continue sur $[a, b]$.

4. Applications :

a. Démontrer le théorème des accroissements finis (on pourra considérer la fonction annexe $g(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$).

b. Grace au théorème des accroissements finis, déterminer un majorant de l'erreur commise en remplaçant $\sqrt{1001}$ par 100.

Exercice 2 Résolution numérique d'une équation (8 points)

Le but de l'exercice est de construire une suite pour calculer numériquement une valeur approchée de la solution de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ sur $[0, 1]$. On considère la fonction f définie pour $x \geqslant 0$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1}.$$

1. Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a une seule racine réelle appartenant à $]0, 1[$, et préciser la valeur de cette racine r.

2. En déduire que r est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur $]0, 1[$.

3. Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, montrer que $f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

4. Calculer la dérivée f' de f, et montrer que

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], |f'(x)| \leqslant \frac{4}{9}.$$

[1]

Théorème. [de Rolle] *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$*

5. On considère la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

a. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$.

b. Démontrer l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_n - r\right| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n,$$

et en déduire la limite de la suite (u_n).

c. Déterminer n telle que u_n soit une approximation de r à 10^{-k} près (on proposera une valeur de n en fonction de k).

Exercice 3 Fonction de Gudermann (10 points)

On considère la fonction $g(x) = \arctan(\sinh(x))$ où arctan et sinh sont les fonctions arctangente et sinus hyperbolique.

1. Donner le domaine de définition D_g de g.

2. Montrer que $g'(x) = \dfrac{1}{\cosh(x)}$.

3. Déterminer les variations et les limites aux bornes du domaine. Dresser le tableau de variation de g.

4. Écrire le développement limité de g en 0 à l'ordre 3. En déduire une tangente à $\mathcal{C}_g$ pour $x = 0$ et déterminer la nature du point d'abscisse $x = 0$.

5. Étudier la convexité de g sur D_g^*.

6. Montrer qu'on peut définir une application réciproque g^{-1}.

7. Représenter l'allure des courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_{g^{-1}}$ sur un même graphique.

8. A propos de g^{-1} :

a. Montrer que $\sinh(g^{-1}(x)) = \tan(x)$ (on pourra remarquer que $\sinh(x) = \tan(g(x))$).

b. Montrer que la dérivée de g^{-1} est $(g^{-1})'(x) = \cosh(g^{-1}(x))$. Déduire de la question précédente que $(g^{-1})'(x) = \sqrt{1 + \tan^2(x)}$.

c. On rappelle que $\sqrt{1 + \tan^2(x)} = \dfrac{1}{\cos(x)}$. Déterminer le développement limité de $(g^{-1})'$ à l'ordre 3.

d. En déduire le développement limité de g^{-1} à l'ordre 4.