Corrigé final MT11, Printemps 2008

Exercice 1

1. $B'(X) = 4X^3 - 2X + 2$. *On vérifie que* $B(-1) = B'(-1) = 0$.

2. $B(X) = (X+1)^2 Q(X) = (X^2+2X+1)Q(X) = (X^2+2X+1)(X^2-2X+2)$. X^2-2X+2 *est irréductible sur* $\mathbb{R}[X]$ *(son discriminant est négatif), et donc la décomposition de* B *est* $B(X) = (X+1)^2(X^2-2X+2)$.

3. *On voit que -1 est aussi racine de* A. *Ainsi,* $A(X) = (X+1)(2X^2-3X+5)$, *qui est la décomposition de* A *en produits d'irréductibles sur* $\mathbb{R}[X]$ *(car* $2X^2-3X+5$ *n'a pas de racine réelle).*
Ainsi, $PGCD(A,B) = X+1$.

4. $F(X) = \dfrac{2X^2-3X+5}{(X+1)(X^2-2X+2} = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{bX+c}{X^2-2X+2}$.
En multipliant par $(X+1)$, *et en prenant* $X = -1$, *on obtient* $a = 2$.
En multipliant par X, *et en prenant* $X \to +\infty$, *on obtient* $2 = a + b$, *soit* $b = 0$.
En évaluant en $X = 0$, *on obtient* $\frac{5}{2} = a + \frac{c}{2}$, *d'où* $c = 1$.
Finalement, $F(X) = \dfrac{2}{X+1} + \dfrac{1}{X^2-2X+2}$.

Exercice 2

1. $f'(x) = \cos x\big(e^{\sin x}+1\big) > 0$ *pour* $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. *Donc* f *est strictement croissante sur* $[0, \frac{\pi}{2}]$, *et réalise une bijection de cet intervalle sur son image* $[f(0), f\left(\frac{\pi}{2}\right)] = [1, e+1]$.

2. **a.** $f'(x) \neq 0$ *pour* $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, *donc* g *sera dérivable sur* $[1, e+1[$. *On montre alors que* g *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $[0, \frac{\pi}{2}[$.

b. $g'(x) = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}} = \dfrac{1}{f' \circ g}$. *En applicant le théorème de dérivation des fonctions composées, on obtient* $g''(x) = -\dfrac{\left(f' \circ g\right)'}{\left(f' \circ g\right)^2} = -\dfrac{f'' \circ g \times g'}{(f' \circ g)^2}$.

c. $g(1) = 0$ *(car* $f(0) = 1$*).*
$g'(1) = \dfrac{1}{f' \circ g(1)} = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{2}$ *car* $f'(0) = 2$.
$f''(x) = -\sin x\big(e^{\sin x}+1\big) + \cos x\big(e^{\sin x}\cos x\big)$.
Donc $g''(1) = -\dfrac{f'' \circ g(1) \times g'(1)}{(f' \circ g(1))^2} = -\dfrac{f''(0) \times \frac{1}{2}}{(f'(0))^2} = -\dfrac{1 \times \frac{1}{2}}{4} = -\dfrac{1}{8}$.
La formule de Taylor-Young s'écrit $g(x) = g(1) + g'(1)(x-1) + \frac{g''(1)}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$.
Ce qui donne :

$$g(x) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{16}(x-1)^2 + o\big((x-1)^2\big).$$

3. $\dfrac{g(x) - \frac{1}{2}(x-1)}{(\ln x)^2} = \dfrac{-\frac{1}{16}(x-1)^2 + o((x-1)^2)}{(\ln x)^2}$.
Or $\lim_{x\to1^+} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{u\to0^+} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$. *Ainsi,* $\lim_{x\to1^+} \left(\frac{\ln x}{x-1}\right)^2 = 1$.
D'où $\lim_{x\to1^+} \dfrac{g(x) - \frac{1}{2}(x-1)}{(\ln x)^2} = -\dfrac{1}{16}$.

Exercice 3

1. **a.** *Soient* $u, v \in E$. $\forall n \in \mathbb{N}, (u \star v)(n) = \sum_{k=0}^{n} u(k)v(n-k) \overset{l=n-k}{=} \sum_{l=0}^{n} u(n-l)v(l) = \sum_{k=0}^{n} v(k)u(n-k) = (v \star u)(n)$. *Donc* $u \star v = v \star u$, $\star$ *est commutative.*

Soient $u, v, w \in E$, $\big[(u \star v) \star w\big](n) = \sum_{k=0}^{n} (u \star v)(k)w(n-k) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} u(l)v(k-l)w(n-k)$.

$$\begin{aligned}
\big[u \star (v \star w)\big](n) &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} u(k)v(l)w(n-k-l) \\
&\overset{l'=n-k-l}{=} \sum_{k=0}^{n}\sum_{l'=0}^{n-k} u(k)v(n-k-l')w(l') \\
&= \sum_{l'=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-l'} u(k)v(n-k-l')w(l') \quad \text{on somme dans l'autre sens} \\
&\overset{l'=n-l}{=} \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{l} u(k)v(l-k)w(n-l) \\
&= \big[(u \star v) \star w\big](n).
\end{aligned}$$

b. *Soit* $u \in E$, $(u \star \varepsilon)(n) = \sum_{k=0}^{n} u(k)\varepsilon(n-k) = u(n)$. *Donc* $u \star \varepsilon = u$, *et par commutativité, on peut conclure que* ε *est le neutre de* $\star$.

c. *Soient* $u, v, w \in E$, *et* $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
[u \star (v + w)](n) &= \sum_{k=0}^{n} u(k) \times \big(v(n-k) + w(n-k)\big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} u(k)(v(n-k) + \sum_{k=0}^{n} u(k) + w(n-k) \\
&= (u \star v)(n) + (u \star w)(n)
\end{aligned}$$

Par commutativité, on peut conclure de la distributivité de $\star$ *par rapport à* $+$.

d. $\big(E, +, \star\big)$ *est un anneau commutatif et unitaire.*

2. **a.** *Soit* $u \in E$, *cherchons au brouillon* $v \in E$ *tel que* $u \star v = \varepsilon$. *On a :*

- $(u \star v)(0) = u(0)v(0) = 1$, *soit* $v(0) = 1$.
- $(u \star v)(1) = u(0)v(1) + u(1)v(0) = v(1) + \lambda = 0$, *soit* $v(1) = -\lambda$.
- $(u \star v)(2) = u(0)v(2) + u(1)v(1) + u(2)v(0) = v(2) - \lambda^2 + \lambda^2 = 0$, *soit* $v(2) = 0$, *et ainsi de suite.*

Posons alors v *la suite définie par* $v(0) = 1$, $v(1) = -\lambda$, *et* $\forall n \geqslant 2, v(n) = 0$. *On vérifie alors que* v *est bien l'inverse de* u.

b. $F \subset E$, *et* $\varepsilon \in F$. *On voit facilement que* $(F, +)$ *est un sous-groupe de* $(E, +)$ *: il reste alors à démontrer que* F *est stable pour la loi* $\star$. *Soient* $u, v \in F$: $\exists p, q \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow u(n) = 0, n \geqslant q \Rightarrow v(n) = 0$.

Soit alors $n > p + q$: $(u \star v)(n) = \sum_{k=0}^{n} u(k)v(n-k) = 0$ *(si* $k \geqslant p, u(k) = 0$, *et si* $k < p, n-k > n-p > q$ *donc* $v(n-k) = 0$*).*

c. *$f \circ f = \mathrm{Id}_E$ de manière évidente, et donc f est involutive $f^{-1} = f$, donc bijective.*
On vérifie de même que $f(u+v) = u+v$.

$$\begin{aligned}
\big[f(u \star v)\big](n) &= (-1)^n (u \star v)(n) \\
&= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} u(k)v(n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \big((-1)^k u(k)\big)\big((-1)^{n-k} v(n-k)\big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \big(f(u)(k)\big)\big(f(v)(n-k)\big) \\
&= \big[f(u) \star f(v)\big](n).
\end{aligned}$$

3. **a.** *Soit $u \in E^{\times}$, et v son inverse : $u \star v = \varepsilon$. En particulier $u(0)v(0) = 1$, donc $u(0) \neq 0$.*

b. *Soit v la suite définie par $v(0) = \dfrac{1}{u(0)}$, et $\forall n \geqslant 1, v(n) = -\dfrac{\sum_{k=1}^{n} u(k)v(n-k)}{u(0)}$. v est correctement définie. De plus, $u(0)v(0) = 1$, et $\forall n \geqslant 1$,*
$(u \star v)(n) = \sum_{k=0}^{n} u(k)v(n-k) = u(0)v(n) + \sum_{k=1}^{n} u(k)v(n-k) = 0.$
Ce qui montre que $u \star v = \varepsilon$.

4. **a.** *$\{n \in \mathbb{N}, u(n) \neq 0\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide (car $u \neq 0_E$), donc elle possède un plus petit élément p. On raisonne de même pour q.*

b.

$$\begin{aligned}
(u \star v)(p+q) &= \sum_{k=0}^{p+q} u(k)v(p+q-k) \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} u(k)v(p+q-k) + u(p)v(q) + \sum_{k=p+1}^{p+q} u(k)v(p+q-k) \\
&= u(p)v(q) \; (u(k) = 0 \text{ pour } k < p \,;\, v(p+q-k) = 0 \text{ pour } k > p) \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

c. *On vient de démontrer que $u \neq 0, v \neq 0 \Rightarrow u \star v \neq 0$, ce qui est la contraposée de $u \star v = 0 \Rightarrow u = 0$ ou $v = 0$. Ainsi, l'anneau E est bien intègre.*