Final MT11, Printemps 2008

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie. Le barême, donné à titre indicatif, est susceptible de modification. Les documents autorisés sont : une calculatrice, la feuille sur les D.L., et une feuille de notes (recto uniquement).

Chaque exercice doit être rédigé sur une feuille différente.

Exercice 1 Fractions rationnelles (4 points)

On considère les polynômes $A(X) = 2X^3 - X^2 + 2X + 5$ et $B(X) = X^4 - X^2 + 2X + 2$.

1. Vérifier que -1 est racine double de B.

2. Décomposer B en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

3. Déterminer le polynôme $PGCD(A, B)$.

4. Simplifier la fraction $F(X) = \dfrac{A(X)}{B(X)}$, puis décomposer $F(X)$ en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 2 Fonctions réciproques (6 points)

On considère la fonction suivante :

$$f(x) = e^{\sin x} + \sin x.$$

1. Montrer que f définit une bijection entre $[0, \frac{\pi}{2}]$ et un intervalle à déterminer. Par la suite, on note g la bijection réciproque.

2. **a.** Donner le domaine sur lequel g est de classe $\mathcal{C}^2$.

b. Calculer $g''(x)$ à l'aide de la formule de dérivation des fonctions composées (on exprimera le résultat en fonction de g, g', f', f'').

c. À l'aide de la formule de Taylor-Young, montrer que au voisinage de 1^+ :

$$g(x) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{16}(x-1)^2 + o\big((x-1)^2\big).$$

3. En justifiant bien les calculs, déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{g(x) - \frac{1}{2}(x-1)}{(\ln x)^2}.$$

Exercice 3 Convolution de suites réelles (10 points)

Dans cet exercice, on note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.
Pour $u \in E$, on note $u(n)$ au lieu de u_n le terme d'indice n de la suite u.
On rappelle que l'on définit une somme sur E en posant $\forall n \in \mathbb{N}, (u+v)(n) = u(n) + v(n)$, et que cette somme munit E d'une structure de groupe commutatif.
Pour $u, v \in E$, on appelle convolée de la suite u par la suite v, la suite $u \star v \in E$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u \star v)(n) = \sum_{k=0}^{n} u(k)v(n-k).$$

On admet facilement que $\star$ est une loi de composition interne sur E, que l'on appelle produit de convolution de suites réelles.

1. **a.** Montrer que $\star$ est commutative et associative.

   b. On note ε la suite réelle définie par $\varepsilon(0) = 1$, et $\forall n \geqslant 1, \varepsilon(n) = 0$. Établir que ε est l'élément neutre de $\star$.

   c. Montrer que $\star$ est distributive par rapport à $+$.

   d. Quelle est la structure de $(E, +, \star)$?

2. **a.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et u la suite réelle définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u(n) = \lambda^n$.
   Montrer que u est inversible pour la loi $\star$, et déterminer son inverse.

   b. On note $F = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang.
   Montrer que F est un sous-anneau de l'anneau $(E, +, \star)$.

   c. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u & \mapsto & f(u) \end{array} \right.$ où $f(u)$ est la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \big[f(u)\big](n) = (-1)^n u(n)$. Montrer que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$, puis que f est un isomorphisme de $(E, +, \star)$.

3. On se propose maintenant de déterminer les inversibles de l'anneau $(E, +, \star)$.

   a. Soit $u \in E^{\times}$. Montrer que $u(0) \neq 0$.

   b. Réciproquement, soit $u \in E$ tel que $u(0) \neq 0$, montrer que u est inversible.

4. On se propose maintenant de démontrer que l'anneau $(E, +, \star)$ est intègre (*i.e.* $u \star v = 0 \Rightarrow u = 0$ ou $v = 0$).
   Soient $u, v \in E$ tels que $u \neq 0$, et $v \neq 0$.
   On pose $p = \min\{n \in \mathbb{N}, u(n) \neq 0\}$, et $q = \min\{n \in \mathbb{N}, v(n) \neq 0\}$.

   a. Justifier l'existence de p et q.

   b. Montrer que $(u \star v)(p+q) \neq 0$.

   c. Conclure.