FINAL

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'attribution de la note. Le barème est donné à titre indicatif. Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée pour l'épreuve. Les calculatrices sont interdites.

UTILISER UNE COPIE PAR EXERCICE

Exercice 1 Polynômes positifs (6 points)

Considérons P, un polynôme réel, tel qu'il existe U et $V \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X) = U^2(X) + V^2(X)$. Lorsque cette propriété est vérifiée on dit que P est somme de deux carrés. Le but de cet exercice est de démontrer que si P est un polynôme positif (i.e. $P(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$) alors P est somme de deux carrés (la réciproque est évidente).

On suppose pour tout l'exercice que P est un polynôme positif

1. Exemples : on remarquera que le polynôme $(X-2)^2$ est un polynôme positif et on a bien $(X-2)^2 = (X-2)^2 + 0^2$ (somme du polynôme $X-2$ au carré et du polynôme 0 au carré).
   a. Montrer que le polynôme positif X^2+1 est bien une somme de deux carrés.
   b. Montrer que le polynôme positif $(X-2)^2(X^2+1)$ s'écrit bien comme somme de deux carrés.
2. Montrer que le degré de P est pair.
3. Soit a une racine réelle de P de multiplicité α, la division euclidienne de P par $(X-a)^\alpha$ donne $P(X) = (X-a)^\alpha Q(X)$ avec $Q(a) \neq 0$. Utiliser cette expression pour montrer que α est pair (on utilisera la continuité de la fonction polynôme $x \mapsto Q(x)$).
4. Pour α pair montrer que le polynôme $(X-a)^\alpha$ est somme de deux carrés.
5. Montrer que tout polynôme X^2+bX+c avec $b^2-4c<0$ est une somme de deux carrés (on pensera à la forme canonique du trinôme).
6. Soient $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{R}[X]$. En posant $Q_1 = A_1B_1 + A_2B_2$ et $Q_2 = A_1B_2 - A_2B_1$ montrer que $(A_1^2+A_2^2)(B_1^2+B_2^2) = Q_1^2+Q_2^2$. En déduire que si U et $V \in \mathbb{R}[X]$ sont deux polynômes qui s'expriment comme la somme de deux carrés alors UV est encore la somme de deux carrés.
7. Soit P un polynôme positif, en utilisant le théorème de factorisation des polynômes sur $\mathbb{R}$ et les questions précédentes montrer que P est somme de deux carrés.

CHANGEZ DE COPIE

Exercice 2 Suites et Matrices (8 points)

On identifie les points de $\mathbb{R}^2$ à des matrices colonnes de taille 2. On munit $\mathbb{R}^2$ de la distance

$$d_\infty\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)=\max(|x_1-x_2|,|y_1-y_2|).$$

Dans tout l'exercice, A désignera une matrice carrée de taille 2 et u sera la suite de $\mathbb{R}^2$, de terme général $u_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$, définie récursivement par

$$u_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=A\times u_n.$$

Exemple : pour $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$ *et* $u_0=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, *on obtient* $u_1=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $u_2=\begin{pmatrix}7\\12\end{pmatrix}$, *etc.*

Le but de cet exercice est de déterminer le comportement de la suite u pour certaines matrices A.

1. Exemple 1 : $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

- **a.** Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=A^n\cdot u_0$.
- **b.** Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $A^n=\begin{pmatrix}1&2-\frac{1}{2^{n-1}}\\0&\frac{1}{2^n}\end{pmatrix}$.
- **c.** En déduire l'expression de x_n et y_n en fonction de n, x_0 et y_0.
- **d.** Montrer que la suite u converge vers une limite $\begin{pmatrix}l_1\\l_2\end{pmatrix}$ que l'on exprimera en fonction de x_0 et y_0.
- **e.** On pose $u_0=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$. Calculer u_1 et u_2 et représenter dans $\mathbb{R}^2$ l'allure de la suite u.

2. Exemple 2 : $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

- **a.** Calculer u_1 et u_2 en fonction de x_0 et y_0.
- **b.** Quel est le comportement de la suite u ? En déduire que si $x_0\neq y_0$, la suite ne converge pas.

3. Exemple 3 : $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&0\end{pmatrix}$.

On pourra utiliser les résultats suivants vus en TD :

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *une application.*

On dit que f *est contractante si* $\exists k\in[0,1[$, *tel que* $\forall a=\begin{pmatrix}x_a\\y_a\end{pmatrix},\forall b=\begin{pmatrix}x_b\\y_b\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, *on ait* $d_\infty(f(\begin{pmatrix}x_a\\y_a\end{pmatrix}),f(\begin{pmatrix}x_b\\y_b\end{pmatrix}))\leqslant kd_\infty(\begin{pmatrix}x_a\\y_a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_b\\y_b\end{pmatrix})$.

Théorème du point fixe :
Si f est contractante, alors elle possède un unique point fixe : $\exists! l \quad f(l) = l$.
Et pour tout $u_0 \in \mathbb{R}^2$ la suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l.

a. Montrer que l'application $f_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est contractante avec $k = \frac{3}{4}$.

b. Déterminer le point fixe de f_A.

c. En déduire le comportement de la suite u.

d. On pose $u_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calculer u_1 et u_2 et représenter dans $\mathbb{R}^2$ l'allure de la suite u.

4. Exemple 4 : donner un exemple de matrice A et de point u_0 tel que la suite u correspondante soit non bornée.

CHANGEZ DE COPIE

Exercice 3 D.L (6 points)

1. a. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $1 - \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$.

b. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\sqrt{1+x}$, et de $(1+u)^{-1/2}$.

c. En déduire le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\sqrt{\dfrac{1+x}{1+x^2}}$.

2. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1+x}{1+x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 1 - \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_f$.

b. Montrer que f est prologeable par continuité en 0, en une fonction que l'on notera $\widetilde{f}$. Que vaut $\widetilde{f}(0)$?

c. La fonction $\widetilde{f}$ est-elle dérivable en 0 ? Si oui, quelle est la valeur de $(\widetilde{f})'(0)$?

d. Quelle est l'image de l'intervalle $]-\infty, 0]$ par $\widetilde{f}$?

e. Donner l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentative de $\widetilde{f}$, et la position relative de cette courbe par rapport à la tangente au voisinage de 0. Quelle est la nature du point 0 ?

f. La fonction $\tilde{f}$ est-elle deux fois dérivable en 0 ? Que pouvez-vous dire du D.L. d'ordre 2 de $\tilde{f}$ en 0 ?