université de technologie Belfort-Montbéliard

Mathématiques

Tronc commun

Final - Automne 2010

Durée de l'épreuve : 2 heures

Une feuille de notes manuscrites est le seul document autorisé.
L'utilisation d'une calculatrice ou d'un téléphone est donc interdite.
Les trois exercices sont à rédiger sur des copies différentes.

Exercice 1 (3 points)

1. Énoncer, sans démonstration, le théorème des accroissements finis.
2. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que $\forall\, x \in I,\ f'(x) > 0$.
   Démontrer que f est strictement croissante sur I.
3. A-t-on l'équivalence suivante : f est strictement croissante sur I si, et seulement si, $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0$?

Pensez à changer de copie.

__Exercice 2__ (8,5 points)

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ k & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

1. (a) Montrer que l'on peut choisir la constante k pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty; 0[$, et sur $]0; +\infty[$
   et calculer $f'(x)$ pour tout réel x non nul.
   (c) Montrer que $\qquad f'(x) \underset{(x \longrightarrow 0)}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2}$
   (d) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.
2. (a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout réel x par
   $$u(x) = (1 - x)\,\mathrm{e}^x - 1.$$
   (b) Montrer que $\qquad \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0.$
   (c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
   Dresser le tableau de variation de f.
   (d) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ représentant f, admet une droite asymptote, lorsque la variable tend vers $-\infty$.
   (e) Tracer l'allure de $\mathscr{C}$, la courbe représentative de f.
3. On admet que cette fonction f possède un développement limité à tout ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de 0, de la forme :
   $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$
   (a) Calculer le développement limité é l'ordre 2 au voisinage de 0 de f.
   Que valent b_0, b_1 et b_2 ?
   (b) En déduire une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 et la position locale de (T) par rapport à $\mathscr{C}$ au voisinage de ce point.
   (c) Pour tout réel x non nul, on pose $g(x) = f(x) + \dfrac{x}{2}$.
   Exprimer $g(x)$ à l'aide de la fonction tanh.
   Préciser alors la parité de la fonction g.
   (d) En déduire b_{2k+1} pour tout entier naturel k non nul.

Pensez à changer de copie.

Exercice 3 (8,5 points)

1. Soient A, I, et K les matrices carrées d'ordre 2, définies par :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Déterminer deux réels λ et μ tels que $A = \lambda K + \mu I$.

   (b) Calculer K^2 en fonction de K.

   (c) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, on a la relation :
$$A^n = (-2)^n I + \frac{4^n - (-2)^n}{2} K.$$
   (d) Donner l'expression explicite de A^n sous forme de matrice carrée d'ordre 2.

2. On note (a_n) et (b_n) les deux suites définies par récurrence par :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_0 & = & 3 \\ a_{n+1} & = & a_n + 3b_n \end{array} \right. , \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} b_0 & = & 1 \\ b_{n+1} & = & 3a_n + b_n \end{array} \right. .$$
   Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit alors $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.

   (b) En déduire les valeurs de a_n, et de b_n en fonction de n.

3. On considère alors la suite (c_n) définie par récurrence par :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_0 & = & 3 \\ c_{n+1} & = & \dfrac{c_n + 3}{3c_n + 1} \end{array} \right. .$$
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ (on admettra sans justifier que $b_n \neq 0$, et que la suite (c_n) est bien définie).

   (b) Donner l'expression de c_n en fonction de n.

   (c) Déterminer la limite de la suite (c_n).