Exercice 2

Partie A

1.

$$A^2 = \mathbb{O}_3, \qquad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^3 = B.B^2 = \mathbb{O}_3.$$

Donc, A est nilpotente d'indice 2 et B est nilpotente d'indice 3.

2.

$$\exp(A) = I_3 + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \exp(B) = I_3 + B + \frac{1}{2}B^2 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

3. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & a \\ 8x + y & = & b \\ z & = & c \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & a \\ y & = & -8a + b \\ z & = & c \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Donc, $\exp(A)$ est inversible et $\exp(A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.(a)

$$CX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = -2X.$$

Donc, $\lambda = -2$.

4.(b) De la question précédente, on déduit facilement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C^n X = (-2)^n X = \begin{pmatrix} (-2)^n \\ -(-2)^{n+2} \\ (-2)^n \end{pmatrix} \neq \mathbb{O}_3 X$. Il vient que C^n est différente de $\mathbb{O}_3$ quel que soit n.

Donc, la matrice $C = A + B$ n'est pas nilpotente.

Partie B

1. Puisque M et N commutent, on peut utiliser la formule du binôme :

$$(M+N)^4 = \binom{4}{0} M^4 N^0 + \binom{4}{1} M^3 N^1 + \binom{4}{2} M^2 N^2 + \binom{4}{3} M^1 N^3 + \binom{4}{4} M^0 N^4.$$

Or, par hypothèse, $M^2 = M^3 = M^4 = \mathbb{O}_3$ et $N^3 = N^4 = \mathbb{O}_3$.

Donc, $(M+N)^4 = \mathbb{O}_3$: $M + N$ est nilpotente.

2.

$$\begin{aligned} \exp(M)\exp(N) &= (I_3 + M)(I_3 + N + \frac{1}{2}N^2) \\ &= I_3 + N + M + \frac{1}{2}N^2 + MN + \frac{1}{2}MN^2 \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} \exp(M+N) &= I_3 + (M+N) + \frac{1}{2}(M+N)^2 + \frac{1}{6}(M+N)^3 \\ &= I_3 + M + N + \frac{1}{2}(M^2 + 2MN + N^2) + \frac{1}{6}(M^3 + 3M^2N + 3MN^2 + N^3) \\ &= I_3 + M + N + \frac{1}{2}(\mathbb{O}_3 + 2MN + N^2) + \frac{1}{6}(\mathbb{O}_3 + 3\mathbb{O}_3 N + 3MN^2 + \mathbb{O}_3) \\ &= I_3 + M + N + MN + \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{2}MN^2 \end{aligned}$$

Il vient que $\exp(M+N) = \exp(M)\exp(N)$.

3.

$$\begin{aligned} \exp(N)\exp(-N) &= (I_3 + N + \frac{1}{2}N^2)\ (I_3 - N + \frac{1}{2}N^2) \\ &= [(I_3 + \frac{1}{2}N^2) + N]\ [(I_3 + \frac{1}{2}N^2) - N] \\ &= (I_3 + N^2 + \frac{1}{4}N^4) - N^2 \\ &= I_3 \qquad (\text{ car } N^4 = \mathbb{O}_3). \end{aligned}$$

Il vient que $\exp(N)$ est inversible et $\exp(N)^{-1} = \exp(-N) = I_3 - N + \frac{1}{2}N^2$.

Exercice 3

Partie A

1. Pour tout $x \in]0\,;\,1]$, $f(x) - x = x(2\cosh(x) - 1)$ est du signe de $2\cosh(x) - 1$.

   Or $x > 0 \Longrightarrow \cosh(x) > \cosh(0) \Longrightarrow \cosh(x) > 1 \Longrightarrow 2\cosh(x) > 2$
   $\Longrightarrow 2\cosh(x) - 1 > 1 > 0$
   Donc $\forall\, x \in]0\,;\,1]$, $f(x) - x > 0$

2. f est dérivable sur $[0\,;\,1]$

   et $\forall\, x \in [0\,;\,1]$, $f'(x) = 2\,(1 \times \cosh(x) + x\sinh(x)) = 2\,(x\sinh(x) + \cosh(x))$.
   Or $x\sinh(x) \geqslant 0$ et $\cosh(x) \geqslant 1 > 0$. Donc $\forall\, x \in [0\,;\,1]$, $f'(x) > 0$
   La fonction f est *continue* et *strictement* croissante sur l'*intervalle* $[0\,;\,1]$.

Donc, d'après le théorème dit «de la bijection», f est bijective de $[0\,;\,1]$ sur l'intervalle image $f([0\,;\,1]) = [f(0)\,;\,f(1)] = [0\,;\,2\cosh 1]$

On en déduit les tableaux de variation de f et de sa réciproque f^{-1} :

x	0	1
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	$2\cosh 1$

et

x	0	$2\cosh 1$
$f^{-1}(x)$	0 $\nearrow$	1

3. La fonction exp admet pour développement limité à l'ordre 2 en 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\,\varepsilon_1(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\longrightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

On en déduit que $\quad e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\,\varepsilon_1(-x)$

puis que $\quad \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + x^2\,\varepsilon_2(x) \quad$ avec $\quad \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$

Donc la fonction f admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 donné par :

$$f(x) = 2\,x\left(1 + \frac{x^2}{2} + x^2\,\varepsilon_2(x)\right) = 2x + x^3 + x^3\,\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

Partie B

1. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que $u_n \in]0\,;\,1]$

- **Initialisation** : $u_0 = 1 \in]0\,;\,1]$
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \in]0\,;\,1]$.
Comme $]0\,;\,1] \subset]0\,;\,2\cosh 1]$, $f^{-1}(u_n) \in]0\,;\,1]$
car pour tout réel x de $]0\,;\,2\cosh 1]$, $f^{-1}(x) \in]0, 1]$
Donc $u_{n+1} \in]0\,;\,1]$
- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in]0\,;\,1]$$

2. (a) Soit n un entier naturel quelconque fixé.
$u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \Longrightarrow u_n = f(u_{n+1})$
On a vu en **B**1. que $u_{n+1} \in]0\,;\,1]$ et en **A**1 que $\forall x \in]0\,;\,1],\ f(x) - x > 0$
Donc $f(u_{n+1}) - u_{n+1} > 0$ c'est-à-dire $u_n - u_{n+1} > 0$.
Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

(b) On a vu que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente. Notons L sa limite.

Comme pour tout entier naturel n, $u_n \in [0\,;\,1]$, on obtient par passage à la limite, $L \in [0\,;\,1]$.
Comme f^{-1} est continue sur $[0\,;\,2\cosh 1]$ (en tant que réciproque d'une fonction continue et strictement croissante), elle est continue en L.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}(u_n) = f^{-1}(L)$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$
Donc, par unicité de la limite d'une suite, $f^{-1}(L) = L$ ce qui implique que $L = f(L)$. Or selon la question **A**1 , la seule solution sur $[0\,;\,1]$ de l'équation $f(x) = x$ est 0. On a donc $L = 0$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

3. (a) • Soit $n \in \mathbb{N}$, n fixé.
$u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \quad$ d'où $\quad u_n = f(u_{n+1}) = 2\,u_{n+1}\cosh(u_{n+1})$
donc $\quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2^{n+1}\,u_{n+1}}{2^n\,u_n} = \dfrac{2\,u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2\,u_{n+1}}{2\,u_{n+1}\cosh(u_{n+1})} = \dfrac{1}{\cosh(u_{n+1})}$

• Puisque $u_{n+1} > 0$, $\quad \cosh(u_{n+1}) > 1$ et $\quad 0 < \dfrac{1}{\cosh(u_{n+1})} < 1$.

On en déduit que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} < a_n$
ce qui signifie que la suite (a_n) est strictement décroissante.

(b) La suite (a_n) est strictement décroissante. Elle est de plus minorée par zéro. On en déduit qu'elle est convergente et que sa limite ℓ vérifie : $0 \leqslant \ell < a_0$.

En admettant que $\ell \neq 0$, on peut conclure que

$$\boxed{u_n \underset{(n\longrightarrow+\infty)}{\sim} \frac{\ell}{2^n}}$$