Exercice 1

Partie A

1. En utilisant les propriétés de la conjugaison complexe, on obtient:

$$P(\overline{\alpha}) = \sum_{k=0}^{n} a_k (\overline{\alpha})^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{\alpha^k}$$

Or $\quad \forall\, k \in [\![0, n]\!],\ a_k \in \mathbb{R} \Longrightarrow \overline{a_k} = a_k \quad$ et $\ a_k\, \overline{\alpha^k} = \overline{a_k}\, \overline{\alpha^k} = \overline{a_k\, \alpha^k}$

$$\text{Donc } \ P(\overline{\alpha}) = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k} = \overline{0} = 0.$$

2. (a) On a:

$$Q(i) = -i^5 + 2i^4 + 7i^3 + 2i^2 + 8i = -i + 2 - 7i - 2 + 8i = 0.$$

(b) D'après la question 1., $-i$ est aussi une racine de Q. On en déduit que Q est divisible par $(X-i)(X+i) = X^2+1$.

(c) On commence par factoriser Q par X : $Q = X(-X^4+2X^3+7X^2+2X+8)$.

On pose la division euclidienne de $-X^4+2X^3+7X^2+2X+8$ par X^2+1 :

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
-X^4 & +\ 2X^3 & +\ 7X^2 & +\ 2X & +\ 8 & & X^2+1 \\ \cline{7-7}
-\ (-X^4 & & -\ X^2) & \downarrow & & & -X^2+2X+8 \\ \cline{1-3}
& 2X^3 & +\ 8X^2 & +\ 2X & & & \\
& -\ (2X^3 & & +\ 2X) & \downarrow & & \\ \cline{2-4}
& & 8X^2 & & +\ 8 & & \\
& & -\ (8X^2 & & +\ 8) & & \\ \cline{3-5}
& & & & 0 & &
\end{array}$$

et on trouve

$$Q = X(X^2+1)(-X^2+2X+8)$$

Enfin, on constate que $x_1 = -2$ est racine «évidente» du trinôme $-X^2 + 2X + 8$ (car $-(-2)^2 - 2 \times 2 + 8 = 0$). En notant x_2 l'autre racine de $-X^2+2X+8$, on sait que

$$x_1\, x_2 = \frac{c}{a} \qquad \text{avec } a = -1 \quad \text{et} \quad c = 8$$

D'où $\quad x_2 = \dfrac{-8}{-2} = 4.$

La décomposition de Q en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ est donc donnée par :

$$\boxed{Q = -X(X^2+1)(X+2)(X-4)}$$

puisqu'il s'agit d'un produit de polynômes de degré 1 et 2 et que le seul polynôme de degré 2 est à racines complexes. Enfin, la décomposition sur $\mathbb{C}[X]$ est donnée par:

$$\boxed{Q = -X(X-i)(X+i)(X+2)(X-4)}$$

Partie B

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculons le produit :

$$\begin{aligned}
M(x) \times M(y) &= \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^x \times 2^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= M(x+y)
\end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$M(x)M(-x) = M(x-x) = M(0).$$

Or, $M(0) = I_3$. Ainsi, $M(x)$ est inversible d'inverse $M(-x)$.

3. D'après la question 1., on a:

$$M(x)^2 = M(x)M(x) = M(x+x) = M(2x).$$

Ainsi:

$$M(x)^3 = M(x)^2 M(x) = M(2x)M(x) = M(2x+x) = M(3x).$$

D'où, par une récurrence immédiate:

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad M(x)^n = M(nx).$$

4. On remarque que $A = M(2)$. Donc:
$$A^7 = M(2)^7 = M(7\times 2) = M(14) = \begin{pmatrix} 2^{14} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

$$f(x) = \begin{cases} x\ln x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

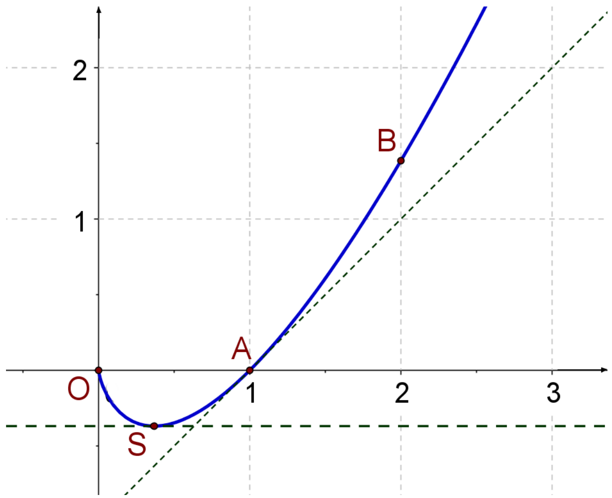
1. On sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$,
   ce qui signifie que f est continue en 0.

2. (a) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\quad \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)}{x} = \ln(x) \underset{(x\to 0^+)}{\longrightarrow} -\infty$
   Donc f **n'est pas dérivable en zéro**.
   (b) f est dérivable sur l'intervalle ouvert $\mathbb{R}^{+*} =]0\,,+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,
   $f'(x) = 1\times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$.

3.
   - $f'(x) > 0 \iff \ln x + 1 > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > \mathrm{e}^{-1}$
     (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$).
     On en déduit que f est strictement croissante sur $\left]\mathrm{e}^{-1}\,,+\infty\right[$.
   - De même $f'(x) < 0 \iff x < \mathrm{e}^{-1}$ et $f'(x) = 0 \iff x = \mathrm{e}^{-1}$.
   - On a $f\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-1}\ln\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = -\mathrm{e}^{-1}$.
   - De $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, on obtient que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$
   - On a donc le tableau de variations de la fonction f suivant :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. (a) D'après la question **1.**, le taux d'accroissement de f en zéro admet pour limite $-\infty$ en zéro. Donc f n'est pas dérivable en 0 mais sa représentation graphique $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées comme demi-tangente verticale en l'origine $O(0,0)$.
   (b) Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses $(O\,;\overrightarrow{i})$ sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   $$f(x) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x\ln x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } \ln x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1$$
   La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points : $\quad O(0,0)$ et $A(1,0)$.
   (c) La tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1 admet pour équation réduite : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ $\quad$ c'est-à-dire $\boxed{y = x-1}$.
   (d) Courbe représentative de f :



5. Soit n un entier naturel non nul fixé.

   La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $I =]1\,,+\infty[$. Donc, d'après le **théorème de la bijection**, f réalise une bijection de I sur l'intervalle image
   $$f(I) = \left]f(1)\,,\lim_{+\infty} f\right[=]0\,,+\infty[$$
   Or $n \in f(I)$. Donc il existe un unique nombre réel $u_n \in I$ tel que $f(u_n) = n$.

   REMARQUE : si on note g la bijection réciproque de la restriction de f à l'intervalle I, c'est-à-dire $g = \left(f_{|I}\right)^{-1}$ on sait que g est continue et strictement croissante sur $f(I)$ avec $\lim\limits_{y\longrightarrow+\infty} g(y) = +\infty$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $f(u_n) = n$ et que $f(u_{n+1}) = n+1$.
D'où $f(u_n) < f(u_{n+1})$ ce qui implique que $u_n < u_{n+1}$ par croissance large de la fonction f sur l'intervalle I.
(sinon $u_n \geqslant u_{n+1} > 1 \Longrightarrow f(u_n) \geqslant f(u_{n+1}) \Longrightarrow n \geqslant n+1$ ce qui est absurde.)
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n < u_{n+1}$ ce qui signifie que la suite $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante}}$

7. On sait que toute suite croissante admet une limite qui est soit réelle, soit $+\infty$.

Supposons que la suite (u_n) est convergente de limite finie ℓ. Alors $\ell \geqslant 1$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n \ln(u_n) = \ell \ln \ell \in \mathbb{R}$.
Or $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \ln(u_n) = n \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} +\infty$. Donc $\ell \ln \ell = +\infty$ ce qui est absurde.
Par conséquent la suite (u_n) est divergente, de limite $+\infty$: $\boxed{\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty}$

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $u_n > 1$ et que $u_n \ln(u_n) = n$.
Donc en passant aux logarithmes népériens,
$\ln(u_n \ln u_n) = \ln n$ puis $\ln(u_n) + \ln(\ln u_n) = \ln n$.
(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\ln(u_n) > 0$ et d'après la question précédente,

$$\frac{\ln(n)}{\ln(u_n)} = \frac{\ln(u_n) + \ln[\ln(u_n)]}{\ln(u_n)} = 1 + \frac{\ln[\ln(u_n)]}{\ln(u_n)}$$

Or d'après **7.**, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = +\infty$ et on sait que $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$

D'où, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln[\ln(u_n)]}{\ln(u_n)} = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(u_n)} = 1$

$$\text{Ainsi} \quad \boxed{\ln(u_n) \underset{(n\longrightarrow+\infty)}{\sim} \ln(n)}$$

(c) Pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n \ln(u_n) = n \quad \text{donc} \quad u_n = \frac{n}{\ln(u_n)}$$

Or $\ln(u_n) \underset{(n\longrightarrow+\infty)}{\sim} \ln(n)$
Par conséquent

$$\boxed{u_n \underset{(n\longrightarrow+\infty)}{\sim} \frac{n}{\ln(n)}}$$

Attention à l'erreur classique qui consiste à «composer» les équivalents : on ne peut pas dire que $\ln(u_n) \underset{(n\longrightarrow+\infty)}{\sim} \ln(n)$ implique $u_n \underset{(n\longrightarrow+\infty)}{\sim} e^{\ln(n)} = n$