Mathématiques générales - MTA1/MTA2
Tronc Commun
Final - Automne 2015

L'usage de la calculatrice et de tout document est interdit. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Le barème donné est susceptible d'être modifié.

Chaque exercice est à rédiger sur une copie à part, sauf l'exercice 4 pour lequel on demande de répondre directement sur le sujet.

Exercice 1 : Continuité et dérivabilité .... 4 points

On considère l'application :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}, \end{array}$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

1. Montrer que f est continue en 1.
2. Soit $x \in]1; 1,5]$. Simplifier :
$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$
En déduire la dérivabilité éventuelle de f à droite de 1.
3. En s'inspirant de la question précédente, étudier la dérivabilité éventuelle de f à gauche de 1.
4. La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

Pensez à changer de copie

Exercice 2 : Suites .... 5 points

On note f la fonction définie sur l'intervalle $I = [3\,,\,+\infty[$ par
$$f(x) = \sqrt{1 + 8\ln x}\,.$$

On admet que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans I et que $\alpha \leq 4$.

1. On rappelle que $\mathrm{e} < 3$. Montrer que : $x \geq 3 \Longrightarrow f(x) \geq 3$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur I. Calculer alors $f'(x)$ pour tout $x \in I$ et montrer que : $\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leq \dfrac{4}{9}$.
3. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction f entre les bornes u_n et α, montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}\,|u_n - \alpha|\,.$$
   (b) En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{4}{9}\right)^n.$
   (c) Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et préciser sa limite.

Pensez à changer de copie

Exercice 3 : Matrices et polynômes .... 6 points

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ et on note I_3 la matrice identité de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit n un entier naturel non nul fixé. Le but de cet exercice est de calculer A^n.

1. (a) Décomposer le polynôme $X^2 - 4X + 3$ dans $\mathbb{R}[X]$.

   (b) Que peut-on dire du degré du reste de la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme $X^2 - 4X + 3$?

   (c) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 4X + 3$.

2. (a) Calculer A^2 puis $A^2 - 4A + 3I_3$.

   (b) En déduire que A est inversible et exprimer son inverse A^{-1} en fonction de A et I_3.

3. Pour tout polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_k X^k$ de $\mathbb{R}[X]$
   et toute matrice $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, on pose :

   $$P(M) = a_0 I_3 + a_1 M + a_2 M^2 + \cdots + a_k M^k.$$

   On admet le résultat suivant :

   Pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, tous polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $\mathbb{R}[X]$, et tout nombre réel λ,

   (i) $P(M) \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$,

   (ii) $(\lambda P + Q)(M) = \lambda P(M) + Q(M)$,

   (iii) $(P \times Q)(M) = P(M) \cdot Q(M)$.

   Déduire des questions 1c et 2a les nombres réels α_n et β_n vérifiant

   $$A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3.$$

Nom : .... Prénom : ....

Exercice 4 : QCM ....5 points

Pour chacune des questions ci-dessous, une et une seule des réponses proposées est exacte. Les cases correspondant aux réponses exactes doivent être complètement **noircies**. Il est donc impératif de rendre le sujet et d'y inscrire ses **nom** et **prénom** dans l'emplacement réservé.

Question 1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Laquelle des affirmations ci-dessous est vraie ?

- ☐ Si f est décroissante et que $u_0 \leqslant u_1$ alors $(u_n)_n$ est décroissante.
- ☐ Si f est décroissante et que $u_0 \geqslant u_1$ alors $(u_n)_n$ est décroissante.
- ☐ Si f est croissante et que $u_0 \leqslant u_1$ alors $(u_n)_n$ est décroissante.
- ☐ Si f est croissante et que $u_0 \geqslant u_1$ alors $(u_n)_n$ est décroissante.

Question 2 Parmi ces applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, laquelle est bijective ?

- ☐ $k\colon x \mapsto |x|$
- ☐ $h\colon x \mapsto x^2$
- ☐ $g\colon x \mapsto \mathrm{e}^x$
- ☐ $f\colon x \mapsto x^3$

Question 3 Laquelle de ces égalités est vraie ?

- ☐ $\tan(\pi/6) = \sqrt{3}$
- ☐ $\tan(\pi/4) = 1$
- ☐ $\tan(\pi/2) = \sqrt{3}$
- ☐ $\tan(\pi/3) = \sqrt{2}$

Question 4 Soit $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est vraie ?

- ☐ $z^2 = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\pi/4}$.
- ☐ Un argument de z^2 est $3\pi/4$.
- ☐ Le module de z^2 est 2.
- ☐ La partie imaginaire de z^2 est l'opposé de sa partie réelle.

Question 5 Soit $f\colon]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$. La négation de l'assertion : $\forall x > 0,\ \forall y > 0,\ \big[x < y \Rightarrow f(x) < f(y)\big]$ est l'assertion...

- ☐ $\exists x > 0,\ \exists y > 0,\ \big(x < y\big)$ et $\big(f(x) \geq f(y)\big)$
- ☐ $\exists x \leq 0,\ \exists y \leq 0,\ \big[x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)\big]$
- ☐ $\exists x \leq 0,\ \exists y \leq 0,\ \big(x < y\big)$ et $\big(f(x) \geq f(y)\big)$
- ☐ $\exists x > 0,\ \exists y > 0,\ \big[f(x) \geq f(y) \Rightarrow x \geq y\big]$

Corrigé

Exercice 1 : Continuité et dérivabilité

1. Pour montrer que f est continue en 1, il suffit de vérifier que :
$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1).$$
On calcule alors les limites à droite et à gauche de f en 1. Pour ce faire, on remarque que
— lorsque $x \overset{>}{\to} 1$: $\lfloor x \rfloor = 1$,
— lorsque $x \overset{<}{\to} 1$: $\lfloor x \rfloor = 0$.
D'où :
$$\lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x) = 1 + \sqrt{1-1} = 1,$$
$$\lim_{x\overset{<}{\to}1} f(x) = 0 + \sqrt{1-0} = 1.$$
Finalement, $f(1) = 1$, d'où le résultat.
2. Soit $x \in [1; 1,5[$, alors $\lfloor x \rfloor = 1$ et :
$$\boxed{\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1+\sqrt{x-1}-1}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}.}$$
On en déduit que :
$$\lim_{x\overset{>}{\to}1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty.$$
Ainsi, $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable à droite en 1.}}$ Sa courbe représentative y admet une demi-tangente verticale orientée vers le haut.
3. Soit $x \in [0,5; 1[$, alors $\lfloor x \rfloor = 0$ et :
$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{0+\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}.$$
On en déduit que :
$$\lim_{x\overset{<}{\to}1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1}{2}.$$
Ainsi, $\boxed{f \text{ est dérivable à gauche en 1}}$, de dérivée $\frac{1}{2}$.
4. $\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est pas dérivable en 1}}$ puisqu'elle n'est pas dérivable à droite en 1.

Exercice 2 : Suites

1. Soit $x \geq 3$. Alors $x > \mathrm{e}$ (puisque $\mathrm{e} < 3$). La fonction ln étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$, on a $\ln x > \ln \mathrm{e} = 1$, et donc
$$1 + 8\ln x > 1 + 8 = 9.$$
Puisque la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, on en déduit que
$$\sqrt{1+8\ln x} > \sqrt{9} = 3, \quad \text{i.e.} \quad f(x) > 3.$$
On a donc démontré que : $\boxed{x \geq 3 \Longrightarrow f(x) \geq 3.}$

2. On admet que la fonction f est dérivable sur I. On pose pour tout $x \in I$, $u(x) = 1 + 8\ln x$, de sorte que $f(x) = \sqrt{u(x)}$. La fonction u vérifie : $\forall x \in I, \quad u'(x) = \frac{8}{x}$.
Soit $x \in I$. On a alors :
$$\boxed{f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{\frac{8}{x}}{2\sqrt{1+8\ln x}} = \frac{4}{x\sqrt{1+8\ln x}} = \frac{4}{xf(x)}.}$$
On remarque que $f'(x) \geq 0$ et donc que :
$$|f'(x)| = f'(x) = \frac{4}{xf(x)}.$$
Puisque $x \geq 3$, on a $f(x) \geq 3$ (d'après 1) et donc $xf(x) \geq 9$. Ainsi :
$$\boxed{|f'(x)| \leq \frac{4}{9}.}$$

3. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) On rappelle que $I = [3; +\infty[$. On a vu à la question 1 que pour tout $x \geq 3$, $f(x) \geq 3$ ce qui revient à dire que $f(I) \subset I$. Puisque $u_0 = 3$, on a $u_0 \in I$. Une récurrence immédiate donne :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I.$$
   Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f étant dérivable sur I, elle y est aussi continue. Par ailleurs, d'après l'énoncé : $\alpha \in I$. On en déduit donc que f est dérivable (et donc continue) entre les bornes $u_n \in I$ et $\alpha \in I$. De plus, d'après la question 2, f' est bornée sur I et donc entre les bornes u_n et α par la constante $\frac{4}{9}$. L'inégalité des accroissements finis permet donc de conclure que :
$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{4}{9}|u_n - \alpha|.$$
   Or, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$. L'inégalité précédente se traduit donc :
$$\boxed{|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n - \alpha|.}$$
   (b) Démontrons par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.
   — **Initialisation.** D'après l'énoncé $\alpha \in I$ et $\alpha \leq 4$ donc $3 \leq \alpha \leq 4$. Puisque $u_0 = 3$, on a donc :
$$|u_0 - \alpha| = |3 - \alpha| = \alpha - 3 \leq 1 = \left(\frac{4}{9}\right)^0,$$
   donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

— **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

D'après la question 3a, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n - \alpha|$. On en déduit donc que

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}.$$

— **Conclusion.** On en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n.}$$

(c) D'après la question 3b,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

On remarque que $0 < \frac{4}{9} < 1$, donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$. Le théorème des gendarmes permet donc de conclure que

$$\lim_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0,$$

ce qui signifie que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha.}$

Exercice 3 : Matrices et polynômes

1. (a) $x_1 = 1$ est une racine évidente du polynôme $X^2 - 4X + 3$.
   En notant x_2 l'autre racine, on sait que $x_1 x_2 = \frac{3}{1}$ d'où $x_2 = 3$ puis

$$\boxed{X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3).}$$

   (b) D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que $X^n = (X^2 - 4X + 3)\,Q(X) + R(X)$, avec $\deg(R(X)) < 2$.
   Donc le reste $R(X)$ est de degré au plus 1 : $\exists\,!(\alpha_n\,,\,\beta_n) \in \mathbb{R}^2\ ;\ R(X) = \alpha_n\,X + \beta_n$.

   (c) On a $X^n = (X^2 - 4X + 3)\,Q(X) + \alpha_n\,X + \beta_n$.
   En évaluant cette égalité de polynômes en 3 puis en 1, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} 3^n = (3^2 - 12 + 3)\,Q(3) + 3\,\alpha_n + \beta_n \\ 1^n = (1^2 - 4 + 3)\,Q(1) + \alpha_n + \beta_n \end{array}\right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{\begin{array}{rcl} 3^n & = & 3\,\alpha_n + \beta_n \\ 1 & = & \alpha_n + \beta_n. \end{array}\right.$$

   On en déduit par soustraction membre à membre que $3^n - 1 = 3\,\alpha_n - \alpha_n = 2\,\alpha_n$, d'où $\alpha_n = \frac{3^n - 1}{2}$. Par suite, $\beta_n = 1 - \alpha_n = 1 - \left(\frac{3^n-1}{2}\right) = \frac{3 - 3^n}{2}$. Ainsi :

$$\boxed{R(X) = \frac{(3^n - 1)}{2}\,X + \frac{(3 - 3^n)}{2}.}$$

2. (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$,
   et $A^2 - 4A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathbb{O}_3$.

   (b) On déduit de l'égalité matricielle précédente que
   $3\,I_3 = 4\,A - A^2 = 4\,A\,I_3 - A\,A = A\,(4\,I_3 - A)$.
   D'où $\frac{1}{3}A\,(4\,I_3 - A) = I_3$ puis $A\underbrace{\left(\frac{1}{3}(4\,I_3 - A)\right)}_{B} = I_3$.
   On a donc trouvé une matrice $B \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A\,B = I_3$ ce qui signifie que A est inversible et que $\boxed{A^{-1} = B = \frac{4}{3}\,I_3 - \frac{1}{3}\,A}$.
   On a donc $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. On a vu en 1.(c) que $X^n = (X^2 - 4X + 3)\,Q(X) + \alpha_n\,X + \beta_n$.

   En évaluant cette égalité de polynômes en A, on obtient :

$$A^n = (A^2 - 4A + 3\,I_3)\,Q(A) + \alpha_n\,A + \beta_n\,I_3$$

   Or, d'après 2.(a), $A^2 - 4A + 3I_3 = \mathbb{O}_3$.
   Donc $A^n = \underbrace{\mathbb{O}_3\,Q(A)}_{\mathbb{O}_3} + \alpha_n\,A + \beta_n\,I_3 = \mathbb{O}_3 + \alpha_n\,A + \beta_n\,I_3 = \alpha_n\,A + \beta_n\,I_3$. Finalement :

$$\boxed{A^n = \frac{(3^n - 1)}{2}\,A + \frac{(3 - 3^n)}{2}\,I_3.}$$

Correction

Nom : .... Prénom : ....

Exercice 4 : QCM ....5 points

Pour chacune des questions ci-dessous, une et une seule des réponses proposées est exacte. Les cases correspondant aux réponses exactes doivent être complètement **noircies**. Il est donc impératif de rendre le sujet et d'y inscrire ses **nom** et **prénom** dans l'emplacement réservé.

Question 1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Laquelle des affirmations ci-dessous est vraie ?

- ☐ Si f est décroissante et que $u_0 \leqslant u_1$ alors $(u_n)_n$ est décroissante.
- ☐ Si f est décroissante et que $u_0 \geqslant u_1$ alors $(u_n)_n$ est décroissante.
- ☐ Si f est croissante et que $u_0 \leqslant u_1$ alors $(u_n)_n$ est décroissante.
- ■ Si f est croissante et que $u_0 \geqslant u_1$ alors $(u_n)_n$ est décroissante.

Question 2 Parmi ces applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, laquelle est bijective ?

- ☐ $k\colon x \mapsto |x|$
- ☐ $h\colon x \mapsto x^2$
- ☐ $g\colon x \mapsto \mathrm{e}^x$
- ■ $f\colon x \mapsto x^3$

Question 3 Laquelle de ces égalités est vraie ?

- ☐ $\tan(\pi/6) = \sqrt{3}$
- ■ $\tan(\pi/4) = 1$
- ☐ $\tan(\pi/2) = \sqrt{3}$
- ☐ $\tan(\pi/3) = \sqrt{2}$

Question 4 Soit $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est vraie ?

- ☐ $z^2 = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\pi/4}$.
- ☐ Un argument de z^2 est $3\pi/4$.
- ☐ Le module de z^2 est 2.
- ■ La partie imaginaire de z^2 est l'opposé de sa partie réelle.

Question 5 Soit $f\colon]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$. La négation de l'assertion : $\forall x > 0,\ \forall y > 0,\ \big[x < y \Rightarrow f(x) < f(y)\big]$ est l'assertion...

- ■ $\exists x > 0,\ \exists y > 0,\ \big(x < y\big)$ et $\big(f(x) \geq f(y)\big)$
- ☐ $\exists x \leq 0,\ \exists y \leq 0,\ \big[x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)\big]$
- ☐ $\exists x \leq 0,\ \exists y \leq 0,\ \big(x < y\big)$ et $\big(f(x) \geq f(y)\big)$
- ☐ $\exists x > 0,\ \exists y > 0,\ \big[f(x) \geq f(y) \Rightarrow x \geq y\big]$