NOM :   PRÉNOM :

Mathématiques générales - MTA1/MTA2
Tronc Commun
Final - Automne 2016

L'usage de la calculatrice est interdit. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Le barème donné est susceptible d'être modifié.

Chaque exercice est à rédiger sur une copie à part (une copie par exercice), sauf les exercices 1 et 3 pour lesquels on demande de répondre directement sur le sujet.

Exercice 1 : Sommes .... (3,5 points)

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, simplifier l'expression $(k+1)\,k!$.

   Réponse : ....

2. On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$.

   (a) En remarquant que $k = (k+1) - 1$, justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k!$.

   Réponse : ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   (b) En déduire une écriture simplifiée de la somme S_n.

   Réponse : ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

3. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

   (a) Simplifier l'écriture de T_n .

Réponse : ....

....

....

....

....

(b) Déterminer, sous réserve d'existence, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{T_n}$.

Réponse : ....

....

....

....

....

....

Exercice 2 : Applications - Nombres complexes .... (5 points)

À rédiger sur une copie séparée

Soit $E = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. On pose pour tout $z \in E$, $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$.

1. Montrer que : $\forall z \in E,\ 1 - f(z) \neq 0$.
2. f définit ainsi une application

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ z & \mapsto & f(z) \end{array} .$$

   Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.
3. Montrer que : $\forall z \in E,\ 1 - |f(z)|^2 = 4\dfrac{\text{Im}(z)}{|z+i|^2}$.
4. On pose $U = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$.
   (a) Rappeler la définition de l'ensemble image $f(\mathbb{R})$.
   (b) En utilisant la question 3, démontrer que $f(\mathbb{R}) \subset U \setminus \{1\}$.
   (c) Soit $\alpha \in U \setminus \{1\}$. Puisque f est bijective, il existe un unique nombre complexe $z \in E$ tel que $\alpha = f(z)$. Toujours en utilisant la question 3, montrer que $z \in \mathbb{R}$.
   (d) En déduire l'ensemble $f(\mathbb{R})$.

NOM : PRÉNOM :

Exercice 3 : Logique - Raisonnements ....(2 points)

1. Écrire la négation de l'assertion : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in [M, +\infty[,\ |e^{-x}| \leq \varepsilon$.

   Réponse : ....

2. Soient a et b deux nombres réels et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On considère l'assertion :

$$\mathscr{A}\ :\ f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b.$$

   (a) Écrire la contraposée de $\mathscr{A}$.

   Réponse : ....

   (b) Écrire la négation de $\mathscr{A}$.

   Réponse : ....

   (c) On suppose dans cette question que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$. L'assertion $\mathscr{A}$ est-elle vraie ? Justifier.

   Réponse : ....

   ....

   ....

   ....

   ....

Exercice 4 : Polynômes ....(5 points)

À rédiger sur une nouvelle copie

Soient n un entier naturel non nul, et P un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$, de degré n.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que : $\forall z \in \mathbb{C},\ |z - \alpha| \geq |\mathrm{Im}(z)|$.
2. On suppose dans cette question que P est scindé sur $\mathbb{R}$. En utilisant une factorisation de P, montrer que : $\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^n$.
3. On prend dans cette question $P = 1 + X^3$.
   (a) Donner une décomposition de P en produits d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
   (b) Trouver $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_0)| < |\mathrm{Im}(z_0)|^3$.
4. On suppose dans cette question que : $\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^n$. Montrer que toutes les racines de P sont réelles. En déduire que P est scindé sur $\mathbb{R}$.
5. Énoncer clairement le résultat obtenu dans cet exercice.

Exercice 5 : Dérivabilité .... (5 points)

À rédiger sur une nouvelle copie

Avertissement : il n'est pas nécessaire de connaître la fonction arctan **pour pouvoir faire cet exercice. Tous les résultats nécessaires concernant cette fonction sont rappelés dans l'énoncé.**

On rappelle que la fonction arctan est la bijection réciproque de la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \tan(t) \end{array}.$$

C'est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie entre autres :

$$\lim_{t\to-\infty} \arctan(t) = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to+\infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2}.$$

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. En dérivant la relation
$$(\tan \circ \arctan)(y) = y,$$
retrouver la formule :
$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

2. Soit φ la fonction définie par :
$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & t\arctan(t) \end{array}.$$

(a) Soit $x > 0$. Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction φ sur $[x, x+1]$ (on prendra bien soin d'énoncer toutes les hypothèses).

(b) Montrer que pour tout $x > 0$ et pour tout $t \in]x, x+1[$:
$$\frac{x}{1+(1+x)^2} + \arctan(x) < \varphi'(t) < \frac{x+1}{1+x^2} + \arctan(x+1).$$

(c) En déduire un encadrement de $\varphi(x+1) - \varphi(x)$ pour tout $x > 0$.

(d) En déduire l'existence et la valeur de la limite :
$$\lim_{x\to+\infty} \left((x+1)\arctan(x+1) - x\arctan(x)\right).$$

Correction

Correction de l'exercice 1.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(k+1)\,k! = (k+1)!$.
2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k \times k! = \sum_{k=1}^{n} \big((k+1)-1\big) \times k! = \sum_{k=1}^{n}(k+1)\,k! - \sum_{k=1}^{n} k!$, et donc :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k!,$$

d'après la question 1.

(b) En effectuant un changement de variable dans la première somme du terme de droite de l'égalité précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n+1} k! - \sum_{k=1}^{n} k! \\ &= \left(\sum_{k=2}^{n} k! \, + \, (n+1)!\right) - \left(1! + \sum_{k=2}^{n} k!\right) \\ &= (n+1)! - 1! \\ &= (n+1)! - 1, \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque que $T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k}$, et donc d'après la formule du binôme de Newton :

$$T_n = (1+1)^n = 2^n.$$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{S_n}{T_n} = \frac{(n+1)!-1}{2^n} = \frac{(n+1)!}{2^n} - \frac{1}{2^n}$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{T_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} (n+1)\frac{n!}{2^n}.$$

Par croissances comparées, $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{2^n} = +\infty$. De plus $\lim_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$. Ainsi : $\lim_{n\to+\infty}(n+1)\frac{n!}{2^n} = +\infty$ et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{T_n} = +\infty.$$

Correction de l'exercice 2.

1. $\forall z \in E,\ 1 - f(z) = 1 - \frac{z-i}{z+i} = \frac{(z+i)-(z-i)}{z+i} = \frac{2i}{z+i} \neq 0$, car $i \neq 0$.
2. f est bijective si et seulement si pour tout $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ l'équation $f(z) = \alpha$ admet une unique solution $z \in E$. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Pour tout $z \in E$,

$$f(z) = \alpha \Leftrightarrow \frac{z-i}{z+i} = \alpha \Leftrightarrow z - i = \alpha(z+i) \Leftrightarrow z - \alpha z = \alpha i + i \Leftrightarrow (1-\alpha)z = (1+\alpha)i \Leftrightarrow z = i\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \text{ car } \alpha \neq 1.$$

L'équation $f(z) = \alpha$ admet donc une unique solution $z = i\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$ qui appartient à E (car $i\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \neq -i$). On en déduit donc que f est bijective et que sa bijection réciproque f^{-1} est donnée par :

$$f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{1\} & \to & E \\ \alpha & \mapsto & i\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha} \end{array}.$$

3. Pour tout $z \in E$,

$$\begin{aligned}
1-|f(z)|^2 &= 1-\left|\frac{z-i}{z+i}\right|^2 = 1-\frac{|z-i|^2}{|z+i|^2} = \frac{|z+i|^2-|z-i|^2}{|z+i|^2}\\
&= \frac{\big|\,(\mathrm{Re}(z)+i\mathrm{Im}(z))+i\big|^2-\big|\,(\mathrm{Re}(z)+i\mathrm{Im}(z))-i\big|^2}{|z+i|^2}\\
&= \frac{\big|\mathrm{Re}(z)+i\,(\mathrm{Im}(z)+1)\,\big|^2-\big|\mathrm{Re}(z)+i\,(\mathrm{Im}(z)-1)\,\big|^2}{|z+i|^2}\\
&= \frac{\big((\mathrm{Re}(z))^2+(\mathrm{Im}(z)+1)^2\big)-\big((\mathrm{Re}(z))^2+(\mathrm{Im}(z)-1)^2\big)}{|z+i|^2}\\
&= \frac{(\mathrm{Im}(z)+1)^2-(\mathrm{Im}(z)-1)^2}{|z+i|^2}\\
&= \frac{\big((\mathrm{Im}(z)+1)-(\mathrm{Im}(z)-1)\big)\times\big((\mathrm{Im}(z)+1)+(\mathrm{Im}(z)-1)\big)}{|z+i|^2}\\
&= \frac{2\times 2\mathrm{Im}(z)}{|z+i|^2}\\
&= 4\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z+i|^2}.
\end{aligned}$$

4. (a) $f(\mathbb{R})=\big\{f(z),\ z\in\mathbb{R}\big\}$.

   (b) Il s'agit de montrer que : $\forall z\in\mathbb{R},\ f(z)\in U\setminus\{1\}$. On rappelle que $U=\{z\in\mathbb{C},\ |z|=1\}$. Soit $z\in\mathbb{R}$. Alors $\mathrm{Im}(z)=0$. D'après la question 3, on en déduit que $1-|f(z)|^2=0$, i.e. $|f(z)|=1$. Donc $f(z)\in U$. Mais puisque f est à valeurs dans $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, on sait que $f(z)\neq 1$. Ainsi, $f(z)\in U\setminus\{1\}$. On a donc démontré que : $f(\mathbb{R})\subset U\setminus\{1\}$.

   (c) Soit $\alpha\in U\setminus\{1\}$. Soit $z\in E$ tel que $\alpha=f(z)$. Montrons que $z\in\mathbb{R}$. D'après la question 3, on a

   $$4\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z+i|^2}=1-|f(z)|^2=1-|\alpha|^2.$$

   Puisque $\alpha\in U$, on a $|\alpha|=1$, donc $4\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z+i|^2}=0$. On en déduit donc que $\mathrm{Im}(z)=0$, c'est-à-dire que $z\in\mathbb{R}$.

   (d) D'après la question 4b, $f(\mathbb{R})\subset U\setminus\{1\}$. D'autre part, dans la question 4c, on a montré que tout $\alpha\in U\setminus\{1\}$ s'écrit $\alpha=f(z)$ avec $z\in\mathbb{R}$ et donc que $U\setminus\{1\}\subset f(\mathbb{R})$. D'où l'égalité :

   $$f(\mathbb{R})=U\setminus\{1\}.$$

Correction de l'exercice 3.

1. $\mathrm{non}\big(\forall\varepsilon>0,\ \exists M\in\mathbb{R},\ \forall x\in[M,+\infty[,\ |\mathrm{e}^{-x}|\leq\varepsilon\big)\ \equiv\ \big(\exists\varepsilon>0,\ \forall M\in\mathbb{R},\ \exists x\in[M,+\infty[,\ |\mathrm{e}^{-x}|>\varepsilon\big)$.
2. (a) La contraposée de $\mathscr{A}$: $f(a)=f(b)\Longrightarrow a=b$ est :

   $$a\neq b\Longrightarrow f(a)\neq f(b).$$

   (b) $\mathrm{non}(\mathscr{A})\equiv\big(f(a)=f(b)\text{ et }a\neq b\big)$.

   (c) Si f est l'application $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&x^2\end{array}$, alors l'assertion $\mathscr{A}$ est fausse en général. En effet, il existe des réels a et b pour lesquels $\mathrm{non}(\mathscr{A})$ est vraie : on a par exemple $f(1)=f(-1)$ et $1\neq -1$. Plus précisément, pour tous réels a et b, on a :

   $$f(a)=f(b)\Longleftrightarrow\big(a=b\text{ ou }a=-b\big).$$

Correction de l'exercice 4.

1. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Soit $z\in\mathbb{C}$.

   $$|z-\alpha|^2=\big|\big(\mathrm{Re}(z)+i\mathrm{Im}(z)\big)-\alpha\big|^2=\big|\big(\mathrm{Re}(z)-\alpha\big)+i\mathrm{Im}(z)\big|^2=(\mathrm{Re}(z)-\alpha)^2+(\mathrm{Im}(z))^2\geq(\mathrm{Im}(z))^2\,,$$

   donc $|z-\alpha|\geq\sqrt{(\mathrm{Im}(z))^2}=|\mathrm{Im}(z)|$. Ainsi :

   $$\forall z\in\mathbb{C},\ |z-\alpha|\geq|\mathrm{Im}(z)|.$$

2. Puisque P est scindé sur $\mathbb{R}$ et unitaire, il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que

$$P = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\ldots(X-\alpha_n) = \prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k).$$

Donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|P(z)| = \left|\prod_{k=1}^{n}(z-\alpha_k)\right| = \prod_{k=1}^{n}|z-\alpha_k|.$$

Pour tout $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, donc d'après la question précédente : $\forall z \in \mathbb{C},\ |z-\alpha_k| \geq |\mathrm{Im}(z)|$. Donc

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq \prod_{k=1}^{n}|\mathrm{Im}(z)| = |\mathrm{Im}(z)|^n.$$

3. Soit $P = 1 + X^3$.

(a) Cherchons les racines complexes de P. Soit $z \in \mathbb{C}$. Écrivons $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$P(z) = 0 \iff z^3 = -1 \iff z^3 = e^{i\pi} \iff \begin{cases} |z^3| = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \arg(z^3) = \pi + k2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r^3 = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 3\theta = \pi + k2\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = \mathrm{e}^{i(\pi/3+k2\pi/3)}$$

$$\iff z = \mathrm{e}^{i\pi/3} \text{ ou } z = \mathrm{e}^{i\pi} = -1 \text{ ou } z = \mathrm{e}^{i5\pi/3} = \mathrm{e}^{-i\pi/3}.$$

Les racines complexes de P sont donc -1, $\mathrm{e}^{i\pi/3}$ et $\mathrm{e}^{-i\pi/3}$ et une décomposition de P en produits de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P = (X+1)\left(X - \mathrm{e}^{i\pi/3}\right)\left(X - \mathrm{e}^{-i\pi/3}\right).$$

(b) Posons $z_0 = \mathrm{e}^{i\pi/3}$. On a alors $P(z_0) = 0$ car z_0 est une racine de P et $\mathrm{Im}(z_0) = \dfrac{\pi}{3} \neq 0$, donc

$$|P(z_0)| < |\mathrm{Im}(z_0)|^3.$$

4. Supposons que : $\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^n$. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine quelconque de P. On a alors $|\mathrm{Im}(z)|^n \leq |P(z)| = 0$, donc $|\mathrm{Im}(z)|^n = 0$ et donc $\mathrm{Im}(z) = 0$, ce qui signifie que z est un nombre réel. On en déduit donc que toutes les racines de P sont réelles.

Tout polynôme non constant étant scindé sur $\mathbb{C}$, le polynôme P peut s'écrire sous la forme

$$P = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\ldots(X-\alpha_n),$$

avec $\alpha_1 \in \mathbb{C}$, $\alpha_2 \in \mathbb{C}$, ..., $\alpha_n \in \mathbb{C}$. Les nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont les racines de P. Or, on a démontré que toutes les racines de P sont réelles. On en déduit donc que : $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, ..., $\alpha_n \in \mathbb{R}$. Le polynôme P est donc scindé sur $\mathbb{R}$.

5. On a démontré dans la question 2 que si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors : $\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^n$. Dans la question précédente, on a démontré que : si $\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^n$, alors P est scindé sur $\mathbb{R}$. On a donc démontré le résultat suivant : « Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$, de degré $n \geq 1$. P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^n$. »

Correction de l'exercice 5.

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. En dérivant la relation donnée dans l'énoncé, on obtient :

$$\arctan'(y) \cdot \tan'(\arctan(y)) = 1.$$

Or :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0.$$

On obtient donc en divisant par $\tan'(\arctan(y))$:

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(y))} = \frac{1}{1+y^2}.$$

2. (a) Soit $x > 0$. Par produit de fonctions qui le sont, φ est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$. Ainsi :

$$\exists c_x \in]x, x+1[, \quad \varphi'(c_x) = \frac{\varphi(x+1) - \varphi(x)}{(x+1) - x}.$$

(b) Soit $t \in]x, x+1[$. Alors :

$$\varphi'(t) = \arctan(t) + \frac{t}{t^2+1}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
x < t < 1+1 &\Rightarrow x^2 < t^2 < (1+x)^2 && \text{car } x > 0 \\
&\Rightarrow 1 + x^2 < 1 + t^2 < 1 + (1+x)^2 \\
&\Rightarrow \frac{1}{1+(1+x)^2} < \frac{1}{1+t^2} < \frac{1}{1+x^2} && \text{(tout est positif)} \\
&\Rightarrow \frac{x}{1+(1+x)^2} < \frac{t}{1+t^2} < \frac{x+1}{1+x^2} \\
&\Rightarrow \frac{x}{1+(1+x)^2} + \arctan(x) < \frac{t}{1+t^2} + \arctan(t) < \frac{x+1}{1+x^2} + \arctan(x+1)
\end{aligned}$$

où la dernière implication provient de la croissance de la fonction arc tangente.

(c) D'après les deux questions précédentes, on en déduit que pour tout $x > 0$ et pour tout $t \in]x, x+1[$:

$$\frac{x}{1+(1+x)^2} + \arctan(x) < \varphi(x+1) - \varphi(x) < \frac{x+1}{1+x^2} + \arctan(x+1) \qquad (1)$$

(d) On remarque que

$$\frac{x}{1+(1+x)^2} \sim_{+\infty} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et que

$$\frac{x+1}{1+x^2} \sim_{+\infty} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On peut donc appliquer le théorème des gendarmes dans l'inégalité (1) et on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} ((x+1)\arctan(x+1) - x\arctan(x)) = \frac{\pi}{2}.$$