

*L'usage de la calculatrice est interdit. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Le barème donné est susceptible d'être modifié.*

**Les 3 premiers exercices sont à rédiger sur des copies séparées. Vous devez rendre impérativement 3 copies même si vous ne traitez pas tous les exercices.**

**Exercice 1** ..... (3 points)

1. Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , développer  $(2a + 3b)^3$  à l'aide de la formule du binôme de Newton.

2. Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

$$n \mapsto \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Calculer  $f \circ f$ . En déduire que  $f$  est bijective.

3. Soit  $n$  un entier non nul.

(a) Démontrer que  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$

(b) En déduire  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)$ .

**Exercice 2** ..... (5 points)

**À rédiger sur une nouvelle copie**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère la fonction  $f_n$  définie par :

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

1. En remarquant que pour tout réel  $x$ ,  $f_n(x) = e^{-x} \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!}\right)$ , justifier que  $f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = -e^{-x} \frac{x^n}{n!}.$$

2. Démontrer que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f_n'(x)| \leq \frac{1}{n!}.$$

3. Appliquer l'inégalité des accroissements finis à  $f_n$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

4. On considère la suite de terme général  $u_n = e f_n(1)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(a) Utiliser la question 3 pour démontrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge.

(b) En déduire la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ .

### Exercice 3 ..... (7 points)

#### À rédiger sur une nouvelle copie

On se propose d'étudier la suite  $(T_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  définis par :

$$\begin{cases} T_0(X) = 1, & T_1(X) = X, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, T_{n+1}(X) = 2X T_n(X) - T_{n-1}(X). \end{cases} \quad (*)$$

1. (a) Calculer  $T_n(X)$  pour  $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .  
(b) Parmi ces 5 polynômes, indiquer sans justification, ceux (ou celui) qui sont irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ .
2. On admet que  $T_n(X)$  est un polynôme de degré  $n$ . On désigne par  $a_n$  le coefficient dominant de  $T_n(X)$ .  
(a) À l'aide de la relation  $(*)$ , exprimer  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
(b) En déduire pour tout  $n \geq 1$ , l'expression de  $a_n$  en fonction de  $n$ .
3. On rappelle que pour tous réels  $a$  et  $b$ ,  $2 \cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$ .  
On se fixe un réel  $a$ . Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$T_n(\cos a) = \cos(n a).$$

4. Déterminer les valeurs de  $T_n(1)$  et de  $T_n(-1)$ .
5. On suppose, dans cette dernière question uniquement, que  $n = 4$ .  
(a) Résoudre dans l'intervalle  $[0, \pi]$ , l'équation d'inconnue  $a$  :  $\cos(4 a) = 0$   
(b) En déduire que le polynôme  $T_4(X)$  admet au moins 4 racines réelles distinctes que l'on précisera.  
(c) Décomposer  $T_4(X)$  en un produit de polynômes irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ .



NOM Prénom

<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	9
<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	9
<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	9

Cette feuille doit impérativement être rendue avec vos copies même si vous ne traitez pas cet exercice. Il vous est demandé d'y inscrire lisiblement vos nom et prénom et de **noircir complètement** les cases correspondant à votre numéro d'étudiant.

### Exercice 4 - QCM .....(5 points)

Les cases correspondant aux réponses exactes doivent être **complètement noircies**, il ne suffit pas de les cocher. Les bonnes réponses rapportent des points positifs, les mauvaises réponses rapportent des points négatifs.

**Question 1** S'il fait beau, alors je mets mon chapeau. Il ne fait pas beau. Que peut-on en déduire ?

- Je ne mets pas mon chapeau.       Rien.       Je mets mon chapeau.

**Question 2** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . Compléter la définition suivante en choisissant la bonne réponse parmi les propositions ci-dessous. *Définition* : on dit que  $f$  est bijective si :

- |   |   |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x).$  | <input type="checkbox"/> $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x).$ |
| <input type="checkbox"/> $\exists! y \in F, \forall x \in E, y = f(x).$ | <input type="checkbox"/> $\exists y \in F, \exists! x \in E, y = f(x).$ |

**Question 3** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Choisir parmi les ensembles ci-dessous celui ou ceux qui sont égaux à l'ensemble des racines  $n$ -ièmes de l'unité.

- |  |   |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> $\{e^{i2k\pi/n}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}.$ | <input type="checkbox"/> $\{e^{ik\pi/n}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}.$ |
| <input type="checkbox"/> $\{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}.$                | <input type="checkbox"/> $\{e^{i2k\pi/n}, k \in \mathbb{Z}\}.$          |

**Question 4** Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite réelle telle que:  $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} \\ \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1 \end{cases}$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .

- Faux.       Vrai.

**Question 5** On dit qu'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$  si :

- |   |   |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \geq B, f(x) \geq A.$ | <input type="checkbox"/> $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \geq A, f(x) \geq B.$ |
| <input type="checkbox"/> $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geq M.$                   | <input type="checkbox"/> $\exists B \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}, \forall x \geq B, f(x) \geq A.$ |