Final MTA2 - Automne 2018
Durée : 1h30

Informations importantes

- **L'usage de la calculatrice est interdit.**
- **Le barème donné est susceptible d'être modifié.**
- **Les résultats non justifiés ne sont pas pris en compte.**
- **La présentation, la qualité de la rédaction, et la rigueur de raisonnement comptent pour une part importante dans la note.**
- **Chaque exercice doit être rédigé sur une nouvelle copie.**

Exercice 1 .... (5,5 points)

À rédiger sur une nouvelle copie

On considère la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n}. \end{cases}$$

On peut démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_n \leqslant 2$. On admet ce résultat pour la suite.

1. On introduit la fonction $f \;:\; \begin{array}{ccc} [1,2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} \end{array}$.
   Justifier rapidement que f est dérivable puis démontrer que : $\forall x \in [1,2], \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[1,2]$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction f, montrer que :
$$\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|.$$
4. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une majoration de $|u_n - \sqrt{2}|$ en fonction de $|u_0 - \sqrt{2}|$ et de n (on ne demande pas de faire la démonstration par récurrence mais simplement de donner la majoration).
5. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Exercice 2 .... (6 points)

À rédiger sur une nouvelle copie

On considère la fonction f définie sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{\ln x} & \text{sinon.} \end{cases}$

1. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier.
2. Justifier rapidement que f est dérivable sur l'ensemble $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et calculer alors f' en tout point de cet ensemble.
3. Démontrer que f' est continue en 0.
4. Dresser le tableau de variations de f sur son ensemble de définition. Compléter ce tableau en justifiant les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f.

NOM : ....

PRÉNOM : ....

Numéro étudiant à coder dans la grille ci-contre :

☐L ☐M ☐P ☐R ☐S ☐T ☐V ☐W ☐X ☐Z
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

Exercice 3 - À rédiger sur une nouvelle copie ....(3,5 points)

Le but de cet exercice est de prouver que la fonction exp définie ci-dessous sur $\mathbb{C}$ n'est pas polynomiale.

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \exp(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\big[\cos\big(\mathrm{Im}(z)\big) + i\,\sin\big(\mathrm{Im}(z)\big)\big]$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\exp(z) = 1$.
2. Supposons qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant : $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \exp(z)$. Quelles sont les racines du polynôme $Q = P - 1$?
3. Que peut-on dire d'un polynôme admettant une infinité de racines ?
4. Démontrer que la fonction exp n'est pas une fonction polynomiale.

Exercice 4 - QCM .... (5 points)

Les cases correspondant aux réponses exactes doivent être **complètement noircies**. Les bonnes réponses rapportent des points positifs, les mauvaises réponses rapportent des points négatifs.

1. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles. Parmi les affirmations ci-dessous, la ou lesquelles sont vraies ?

☐ Une suite bornée est convergente.

☐ Si $(u_n)_n$ converge vers ℓ, alors $(u_n)_n$ est soit croissante et majorée, soit décroissante et minorée.

☐ Une suite convergente est minorée.

☐ Si $u_n < v_n$ au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

2. Cocher parmi les propositions ci-dessous l'équivalent de $\mathrm{e}^x - 1$ en 0 :

☐ $-x$ ☐ $-x^2$ ☐ x ☐ $-\frac{x^2}{2}$ ☐ $\frac{x^2}{2}$

3. Les polynômes de degré 2 à coefficients réels sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

☐ Vrai ☐ Faux

4. « Définition : Un polynôme non constant $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit ... dans $\mathbb{K}[X]$ si ses seuls diviseurs sont les polynômes constants et les polynômes de la forme λP avec $\lambda \in \mathbb{K}$. »
Compléter les pointillés de la définition ci-dessus en choisissant le mot qui convient parmi les deux propositions suivantes.

☐ irréductible ☐ scindé

5. Parmi les affirmations ci-dessous, la ou lesquelles sont vraies ?

☐ $n^2 + \ln(n) \sim_{+\infty} n^2$ ☐ $\mathrm{e}^{1+n} \sim_{+\infty} \mathrm{e}^n$ ☐ $\dfrac{2n^2+1}{n+n^2} \sim_{+\infty} 1$