

Médian

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main

Chaque exercice doit être rédigé sur une feuille différente

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 (*Applications directes du cours*) - 7 points

Dans cet exercice, aucune question ne nécessite plus de quelques lignes pour être résolue

1) Les propositions suivantes sont elles vraies ? (justifier) Sinon, donner leur négation.

a - $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N}, x.y \leq n,$

b - $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{Z}, x.y \leq 2 \implies 2.x \leq y.$

2) Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^2$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$ qui vérifient $|z - 4i + 3| = 5.$

3) A quelle condition sur $m \in \mathbb{R}$, le polynôme suivant a-t-il une racine strictement négative et une autre strictement positive :

$$P(x) = x^2 + (2m + 1)x + m.$$

4) Soit l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & x + y \end{array}$$

a - Cette application est-elle surjective ? injective ?

b - Montrer que la relation \mathcal{R} sur \mathbb{R}^2 définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathcal{R} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \iff f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = 0$$

est une relation d'équivalence.

5) Trouver deux suites (u_n) et (v_n) non bornées telles que la suite de terme général $w_n = u_n - v_n$ soit bornée et non convergente.

Exercice 2 (NOUVELLE FEUILLE) - 6 points

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Trouver une matrice $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec **des 1 sur la diagonale** telle que $A.P = P.D$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Trouver l'inverse de P .

3) Exprimer A en fonction de P , D et P^{-1} . Puis A^2 . Généraliser à A^n .

4) Exprimer A^n en fonction de n .

Exercice 3 (NOUVELLE FEUILLE) - 7 points

1) Résoudre dans \mathbb{R} les équations ou inéquations suivantes :

a - $|(x - 1)(x + 3)| < 2$,

b - $\max\{|y - 1|, |x - 1|\} = 1$

2) Soient les deux nombres complexes

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

a - Écrire z_1 et z_2 sous forme arithmétique.

b - Écrire z_1, z_2 sous forme arithmétique et trigonométrique.

c - En déduire une écriture de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.