le 19 Janvier 2007

UTBM MT11

Médian

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Chaque exercice doit être rédigé sur une feuille différente

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 *(Applications directes du cours) - 8 points*

Dans cet exercice, aucune question ne nécessite plus de quelques lignes pour être résolue

1) Soient E, F, G 3 ensembles. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow G$ deux applications. On définit l'application :

$$\begin{array}{rccc} h: & E & \longrightarrow & F \times G \\ & x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array}$$

a - Montrer que

$$((f \text{ injective}) \wedge (g \text{ injective})) \Longrightarrow (h \text{ injective}).$$

b - On suppose que f et g sont surjective. h est-elle nécessairement surjective ? Sinon, donner un contre exemple.

2) Donner la borne supérieure et inférieure de l'ensemble suivant (justifier rapidement) :

$$A = \{(-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}.$$

3) A quelle condition sur $m \in \mathbb{R}$, le polynôme suivant a-t-il deux racines distinctes non nulles et de même signe (justifier) :

$$P(x) = x^2 + (m-2)x - m + 2.$$

4) Les ensembles suivants sont-ils des sous-groupes de $(\mathbb{R}^2, +)$? (justifier rapidement)
a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}$,
b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 1\}$,
c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0\}$,
d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\}$.

5) Déterminer **l'ensemble des PGCD** *de $A(X) = X^5 + X^3 + X^2 + 1$ et $B(X) = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$.*

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 2 *(***NOUVELLE FEUILLE***) - 7 points*

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1 - Trouver une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec **des 1 sur la diagonale** *telle que $A.P = P.T$ avec*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 - Trouver l'inverse de P.

3 - Trouver une expression de T^n en fonction de n. Justifier.

4 - Exprimer A^n $(n \in \mathbb{N})$ en fonction de P, T, P^{-1} et n. Justifier.

5 - En déduire une expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 *(***NOUVELLE FEUILLE***) - 8 points*

Soit la suite définie par récurrence ($a \in \mathbb{R}_+$ fixé) :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u_0 & \in & \mathbb{R}_+^* \\ u_{n+1} & = & \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}) \end{array} \right.$$

On se propose de montrer que u_n tend vers $\sqrt{a}$.

1) vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

2) Montrer que $u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2-a)^2}{4.u_n^2}$.

3) Montrer que pour $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{a}$.

4) Montrer que $(u_n)_n$ est décroissante. En déduire que $(u_n)_n$ est convergente.

5) Montrer que la limite de $(u_n)_n$ est $\sqrt{a}$.

QUESTIONS SUPPLÉMENTAIRES. *(3 points)*

6) En utilisant la relation $u_{n+1}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a}).(u_{n+1} + \sqrt{a})$, Montrer que

$$u_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2.\sqrt{a}}(u_n - \sqrt{a})^2.$$

7) Si $u_0 - \sqrt{a} \leq 1$, déduire de 6) une majoration de la différence $u_n - \sqrt{a}$ $(n \geq 1)$ en fonction de n et $\sqrt{a}$.

8) Prenons $u_0 = 3$ et $a = 10$. Grâce à l'encadrement $3 \leq \sqrt{a} \leq 4$, montrer que u_4 nous donne $\sqrt{10}$ avec une précision d'au moins 6 chiffres ?